EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

29e JAARGANG 1953/54

IV

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (*f* 8,00) zijn ingetekend, betalen *f* 6,75.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 3,00 op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep Liwenagel te Arnhem. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. Vredenduin, Bakenbergseweg 158 te Arnhem. De leden van Wimecos storten hun contributie, die met ingang van 1 September 1953 gewijzigd is in *f* 6,— per jaar, op postrekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam (hierin zijn de abonnementskosten op Euclides begrepen). De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107^{III}, Amsterdam, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Zwolse weg 371, Apeldoorn, tel. 330 (Wenum, K 6762). Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

INHOUD:

HET WISKUNDE-ONDERWIJS VOOR DE NIET-MATHEMATISCHE RICHTINGEN.

De Wiskunde-werkgroep van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs organiseert sinds de oorlog in het najaar een weekend-conferentie, waarop problemen van het Wiskunde-onderwijs door verschillende sprekers worden behandeld. Op deze conferentie en ook op de maandelijkse bijeenkomsten plachten we onze aandacht te bepalen tot het wiskunde-onderwijs in de B- en β-afdelingen van het V.H.M.O. Slechts terloops zijn we van deze lijst afgeweken. Sinds ruim een jaar houden we ons echter op onze maandelijkse bijeenkomsten bezig met het aanvankelijk wiskunde-onderwijs, dus met problemen, die voor elk voortgezet onderwijs bij benadering dezelfden zijn. Op de weekend-conferentie van 1953, gehouden te Amersfoort, stelden we ons nu het, voor ons enigszins nieuwe, probleem „Het wiskunde-onderwijs voor de niet-mathematische richtingen”. Behandeld werden het MULO-, MMS- en Gymnasium-α-onderwijs door sprekers, die in deze takken van onderwijs werkzaam zijn en ons met soms geheel nieuwe problemen confronteerden. Een algemene lezing ging hieraan vooraf; bij deze gelegenheid kwam ook het HBS-A onderwijs ter sprake. De belangstelling was groter dan op enige tot nu toe door ons belegde conferentie. De samenwerking tussen allen, die in de onderscheiden takken van voortgezet onderwijs geïnteresseerd zijn, wordt klaarblijkelijk op prijs gesteld. Deze samenwerking kan zich ook uitstrekken tot het L.O., naar bleek uit een gemeenschappelijke vergadering met de Coöperatie „De Drukpers op School”, waarbij het vraagstuk van het rekenonderwijs aan de orde was.

We zijn er de Redactie van Euclides erkentelijk voor, dat zij deze aflevering beschikbaar heeft gesteld voor de publicatie van de ter conferentie gehouden lezingen (vergezeld van enkele discussie-opmerkingen, die ons de moeite waard leken om te worden opgenomen).

Hans Freudenthal

Voorzitter van de Wiskunde-Werkgroep der W.V.O.

Stellingen van de lezing van Dr H. Turkstra (Hilversum) op 7 November 1953 in „De Grasheuvel" te Amersfoort voor de Wiskunde-Werkgroep van de WVO.

Waarde van wiskunde-onderwijs aan niet-mathematische richtingen en enige algemene aanwijzingen omtrent de methodiek en didactiek daarvan.

1. *Historisch* en *organisatorisch* is het leerprogramma voor niet-mathematische richtingen anders gericht dan voor mathematische richtingen.
2. Dit brengt met zich mee, dat ook het *wiskunde-onderwijs* voor de niet-mathematische richtingen (Gymn. A, HBS A, MMS, ULO A) *andersoortig* en *anders gericht* moet zijn dan voor mathematische richtingen. (Gymn. B, HBS B, ULO B).
3. Die anders-gerichtheid staat in nauw verband met de andere *doelstelling*; uitgaande n.l. van de stelling, dat het wiskunde-onderwijs op de M.S. o.a. een *materiële* en *formele* waarde heeft, moet bij dit onderwijs aan niet-mathematische richtingen het accent vallen op de *formele* waarde (bij de HBS A op de materiële waarde.)
4. Dat *andersoortige* eist:
   a. een andere methodiek (leerprogramma, omvang en aard van de leerstof, leerboek);
   b. een andere didactiek (instelling van de leraar, aanbieding en verwerking van de leerstof).
5. Het complex van de *methodische* vragen dient in de eerste plaats onderwerp van bespreking te zijn in de georganiseerde vakgroepen (Wimecos, Liwenagel, Velines, Wiskunde-Werkgroep van de W.V.O., Paedagogische Studiecentra), van wie in dezen voorstellen moeten uitgaan aan Inspectie en Departement.
6. De *didactische* vragen liggen meer op het gebied van de paedagogisch-didactische opleiding van de leraren, ofschoon dit niet uitsluit, dat ook de in punt 5 genoemde kringen hier een taak hebben.
7. Enige opmerkingen over de wiskunde, speciaal op de H.B.S. A:
   a. Een eerste en *minimale* eis is, dat het wiskunde-onderwijs op de H.B.S. A weer wordt gegeven in de 4e en de 5e klasse en wel in beide gedurende één uur per week. (Rapport Drs Pleysier c.s. Januari '53).
   b. Het zou zelfs *wenselijk* zijn, met het oog op eventueel latere studie in de Handelswetenschappen, Economie, Statistiek e.d. dit te verhogen tot 2 uur in de 4e en 1 uur in de 5e klasse.

geschil tussen twee mijner leerlingen, die mij beide even sympathiek gezind waren. Daar ze voor mijn besef optraden als representanten van de afdelingen H.B.S. en Gymnasium van mijn school, had ik bovendien het niet minder bevredigende gevoel aan mijn rectorale opdracht te hebben voldaan, door op deze wijze een steentje bij te dragen tot de overbrugging tussen deze beide afdelingen van eenzelfde school. De 4 afdelingen: Gymnasium, H.B.S. A, H.B.S. B en M.M.S. van een volledig Lyceum mogen n.l., als 't goed zal zijn, niet los naast elkaar staan, maar dienen in een gezonde wisselwerking innig samen te gaan.

Dit sluit natuurlijk geenszins een *verschil in methode*, een verschillende accentuering der hoofd- en bijvakken e.d. uit.

Wat demonstreert nu dit verhaaltje, of liever gezegd dit gesprek tussen twee vertegenwoordigers van wat we dan maar zullen noemen de mathematische en de niet-mathematische richting? Dit, dat we te maken hebben met twee volkomen *anders* ingestelde, *anders* gerichte scholieren, wel is waar van eenzelfde school, maar van twee *verschillende* afdelingen. En de leraar, wiens taak het is wiskunde-onderwijs te geven, het ene uur aan een klas leerlingen van de H.B.S. B afdeling, het onmiddellijk daarop volgende uur aan een klas H.B.S. A, M.M.S., of Gymnasium α, moet zich wel terdege rekenschap geven van die *andersoortigheid*, die *anders*-gerichtheid en hij moet dat in zijn onderwijs ook doen uitkomen. Doet hij dat niet, dan komt òf de ene categorie te kort òf de andere, of misschien wel alle beide.

We zullen het deze conferentiedagen hebben over het wiskundeonderwijs aan niet-mathematische richtingen, waarbij we er natuurlijk niet aan kunnen ontkomen het te zien tegen de achtergrond van het wiskundeonderwijs aan de mathematische richtingen.

Ja, dat *wiskundeonderwijs aan niet-mathematische richtingen.*

Hier ligt een probleem, dat niet de laatste tijd plotseling actueel is geworden, maar waarover ook reeds in vroeger tijden heftig is gediscussieerd. Men behoeft maar de Jaargangen van Euclides vanaf 1924 tot op heden door te bladeren, om dit grif toe te stemmen.

Dr D. J. Schrek schreef in het eerste no. van het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift van Wiskunde, dat later in Euclides werd omgedoopt, een interessant artikel over „Het Cultuurhistorisch element in het wiskundeonderwijs." Hij constateert met leedwezen, dat bij het V.H.M.O. de beide groepen, de literairhistorische en de exacte vakken, zo al niet tegenover elkaar, dan toch naast elkaar staan. Deze toestand is, zegt Dr Schrek, zeker

c. Echter *geen verplicht eindexamen* ervan maken; om de nadelige gevolgen van een ongezonde training en overlading van het eindexamen te vermijden.

d. Omschrijving van de leerstof voor deze beide klassen tezamen: herhaling van de leerstof der 2e en 3e klasse, finantiële rekenkunde (hetgeen inhoudt: samengestelde interest, annuïteiten, rentabiliteitswaarden), grafische voorstellingen, terwijl met het oog op latere verdere studie voor economie e.d. *enige* kennis van Differentiaal- en Integraalrekening zou kunnen worden gegeven.

Waarde van Wiskundeonderwijs voor niet-mathematische richtingen en enige algemene aanwijzingen voor de *methodiek* en *didactiek* daarvan.

Laat ik beginnen met een verhaaltje, niet verzonnen, maar echt gebeurd.

Enige jaren geleden was ik getuige van een interessant gesprek tussen een α-gymnasiast en een B-H.B.S.-er, beide leerlingen van het Lyceum, waarvan ik de rector was. De gymnasiast vond, dat die H.B.S.-ers wel eens wat meer mochten weten van de grote figuren uit de klassieke oudheid, die op wetenschappelijk gebied zoveel hebben gepresteerd, b.v. van een Pythagoras, waarop de H.B.S.-er prompt antwoordde: „en dan moesten jullie, α-gymnasiasten, maar eens wat meer notitie nemen van wat zo'n grote figuur werkelijk op wiskundig gebied heeft uitgedacht."

Ik volgde met belangstelling deze vreedzame schermutseling en verheugde mij er inwendig over, dat deze twee elkaar zo raak op de wederzijdse tekortkomingen wisten te wijzen. Want ze hadden eigenlijk beiden gelijk, èn de gymnasiast èn de H.B.S.-er. Maar, omdat ik het met hen allebei even goed meende, koos ik de paedagogisch wijze middenweg, gaf hen allebei gelijk, maar merkte vergoelijkend op, dat ze voor die wederkerig toegedachte uitbreiding hunner studieopdracht geen tijd hadden. Dit klopte op dat moment wonderwel, want het was juist in de drukke proefwerktijd, vlak voor het kerstrapport.

Ik nam me toen voor om, ten einde in beider manco tevoorzien, een artikeltje in hun schoolkrant te schrijven over de grote Pythagoras, in de hoop, dat èn de gymnasiast èn de H.B.S.-er in de Kerstvacantie tijd zouden vinden, om het te lezen en er de nodige belangstelling voor zouden tonen. Òf ze dat gedaan hebben, weet ik niet, ik zal dat maar aannemen, in elk geval had ik het bevredigende gevoel als arbiter te zijn opgetreden in een vreedzaam

hoogst ongewenst. Een gymnasiale, zowel als een H.B.S.opleiding behoort toch een harmonische ontwikkeling van de geest te geven, behoort onze cultuur als één geheel te doen zien.

De B-H.B.S.-er en de α-Gymnasiast van daar straks moeten aan hetzelfde object hun kennis en inzicht vermeerderen, maar benaderen dat object van *verschillende* kanten, de cultuur-historische en de mathematisch-physische, om het vervolgens te doordringen en het in zijn *totaliteit* in zich op te nemen.

Dit benaderen, dit doordringen en dit in zich opnemen vergt, omdat de operatie van verschillende kant wordt ondernomen, een *andere* stellingname tot het object, verloopt dus ook volgens *andere* leerwijzen en bezigt *andere* leerprogramma's e.d.

Vandaar dat reeds vóór de gecompliceerdheid van de uitingen der hedendaagse cultuurwereld de noodzaak gevoeld werd tot oprichting van verschillende schooltypen. We zullen dit thans niet historisch uitpluizen, maar constateren alleen, dat in de historie van de laatste honderd jaar V.H.M.O. *de scheiding* in mathematische en niet-mathematische richting voldoende tot uitdrukking is gekomen. Deze scheiding voerde organisatorisch noodzakelijkerwijs tot anders ingerichte leerprogramma's, andere vakindeling, enz. En dit brengt weer met zich mee, dat ook het wiskundeonderwijs voor de niet-mathematische richting *andersoortig* en *anders gericht* moet zijn dan dat voor de mathematische richting.

Echter moet steeds worden bedacht, dat dat andersoortige nimmer afbreuk mag doen aan de *totaliteitsopvatting* van de cultuurbeheersing. Deze twee — nl. die andersoortigheid èn de eis der totaliteitsopvatting — moeten steeds in een soort *polariteits*-verhouding met elkaar verkeren, wel vaak scherp van elkaar onderscheiden, soms zelfs tegenover elkaar gesteld, maar nooit het ene zonder het andere denkbaar.

Het hier gebezigde begrip *polariteit* diene men te verstaan in dezelfde betekenis als in de psychologie, waar het wezenskenmerk juist is dat typische gelijktijdige optreden van scherpe tegenstellingen onder sterke onderlinge beinvloeding en gebondenheid.[1])

In het voorgaande zijn, naar ik hoop, de beide stellingen betreffende het andersoortige wiskundeonderwijs en de anders gerichtheid daarvan voor de niet-mathematische richtingen voldoende

---

[1]) Das Verhältnis von schärfsten Gegensätzen, die sich gleichzeitig gegenseitig bedingen, voraussetzen und verlangen. Ein solches Verhältnis heiszt *Polarität* oder Dialektizismus. Dr *Hans Jakob Riienderknecht* „Schule im Alltag", Zwingli Verlag Zürich 1939, blz. 264 v.v.

omschreven, om daarin ons *axiomatisch* uitgangspunt te bepalen voor onze verdere uiteenzettingen.

Dat andersoortige staat in de eerste plaats in verband met *het doel,* dat we met wiskundeonderwijs voor niet-mathematische richtingen nastreven. En dan worden we allereerst voor de vraag geplaatst: heeft het geven van wiskunde-onderwijs op de niet-mathematische afdelingen eigenlijk wel enig nut? Indien we van de nuttigheid daarvan niet overtuigd zijn — en er zijn er, die daarvan helemaal niet zo zeker zijn — heeft dan ieder verder betoog over wiskundeonderwijs voor niet-mathematische richtingen en beschouwingen over de methodiek en didactiek daarvan eigenlijk nog wel zin?

Als Dr Wielenga in zijn voordracht „Is wiskunde-onderwijs voor de α's noodzakelijk?", die hij heeft gehouden voor het Mathematisch Centrum op 31 Oct. 1946 (gepubliceerd in Euclides, 22e Jg. No. 2 en 3) deze vraag, meer speciaal voor de Gymnasiale α's, in een duidelijk geargumenteerd betoog behandelt, vangt hij ook aan met een stel inleidende vragen: „wat willen wij eigenlijk met ons wiskunde-onderwijs bereiken, welke zegeningen willen we er mee verspreiden, in welk opzicht moet het onze leerlingen — en dan speciaal de α's — vormen? Zijn er in de aard van het vak zelve factoren gelegen, die het toch eigenlijk voor een groot aantal leerlingen ongeschikt maken als leerstof, zodat we er noodgedwongen maar van moeten afzien? Of ligt de oorzaak in een verkeerde methode en waarom en waarin faalt dan de gemeenlijk gevolgde weg?"

Na eerst op deze vragen te zijn ingegaan, behandelt Wielenga het probleem van het wiskunde-onderwijs voor de Gymnasiale α's in zijn volle uitgebreidheid. Zijn eindconclusie is een tweeledige:

1. hij verklaart zich tegen het trainingskarakter van het wiskunde-onderwijs in de hoogste klassen 5α en 6α, zoals dat bij de vigerende regeling — gericht op een verplicht eindexamen — helaas maar al te veel het geval is;

2. hij verklaart zich voor een goed gegeven wiskunde-onderwijs, gedurende de gehele 6-jarige periode van een Gymnasium, daar dit onderwijs — indien het vooral aan oudere leerlingen in epistemische zin gegeven wordt — aan bijna ieder intelligent kind een waardevolle vorming kan schenken (*formele waarde*), terwijl het als hulpvak voor de natuurwetenschap ook onontbeerlijk is (*materiele waarde*).

Wij kunnen ons met de argumenten en met de conclusies van Wielenga in hoofdzaak wel verenigen en hechten vooral ook be-

tekenis aan de prioriteit, die Wielenga aan de *formele* waarde toekent, die hij n.l. noemt vóór de *materiele* aarde. Zijn beschouwingen gelden m.m. ook voor een groot gedeelte voor het wiskundeonderwijs op de *andere* niet-mathematische richtingen. Mijns inziens zit hierin het fundamentele verschil tussen het wiskundeonderwijs aan mathematische en niet-mathematische richtingen, dat het accent bij de eerste op de materiele waarde valt en bij de laatste op de formele.

Dit is ook de visie van Dr Dijksterhuis en van Dr Vredenduin, die beiden de wiskunde aan de Gymnasiale α's meer in cultuur-historische zin willen zien gegeven, n.l. meer gericht op de Griekse wiskunde.

Op die prioriteit van de formele waarde zou ik een uitzondering willen maken voor wat betreft de wiskunde op de H.B.S. A, waar zij vooral als hulpwetenschap voor de handelswetenschappen en de economie dienst kan doen, zoals dit op de H.B.S. B en op het β-Gymnasium het geval is met de wiskunde in dienst van de natuurwetenschappen. Op het Gymnasium α, de M.M.S. en de Ulo A echter geldt een dergelijke hulpdienst niet en dient op deze afdelingen de betekenis van de wiskunde dus meer gezien te worden in haar formele waarde, of zoals we het in *stelling* 3 uitdrukten, *zal het accent* hier meer vallen op de *formele* waarde.

We gaan stilzwijgend voorbij aan het feit, dat het nut van de wiskunde niet beperkt is alleen tot haar formele en materiële waarde. Het is gemakkelijk te verdedigen, dat door goed wiskundeonderwijs ook *ethische, aesthetische, cultuur-historische, sociale* en zelfs *religieuze* waarden kunnen worden gediend, evengoed op de mathematische als op de niet-mathematische afdelingen.

Om al deze redenen is wiskunde-onderwijs op de niet-mathematische richtingen dus zeker *waardevol* en moet er voldoende aandacht en tijd aan worden besteed. Het moet echter *ander* wiskundeonderwijs zijn dan op de mathematische afdelingen.

Ik kom nu tot mijn 4*de stelling*, n.l. dat het andersoortige wiskunde-onderwijs aan de niet-mathematische richtingen vereist:

a. een andere *methodiek* (leerprogramma, omvang en aard van de leerstof, leerboek);

b. een andere *didactiek* (instelling van de leraar, aanbieding van de leerstof, enz.).

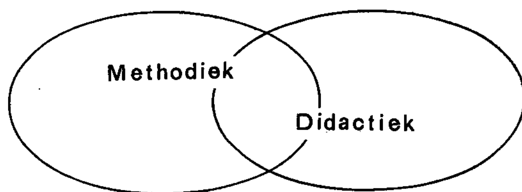
Het zal niet overbodig zijn eerst de begrippen methodiek en didactiek nog wat nauwkeuriger te omschrijven, want hier heerst inderdaad vaak verwarring. Deze begrippen worden nog al eens door elkaar gebruikt. Men ziet vaak het woord methodiek gebezigd,

waar men van didactiek moest spreken en omgekeerd. En geen wonder, want de begrippen hebben inderdaad veel overeenkomstigs. Beide betekenen eigenlijk een samenstel van *wegen*. Bij de *methodiek* is het het samenstel van wetenschappelijke en practische wegen, waarlangs een doel bereikbaar is, terwijl de *didactiek* inhoudt het samenstel van *persoonlijke* wegen, waarlangs men een bepaald doel voor anderen of voor zichzelf bereikbaar wil maken.

Terwijl de *methodiek* een meer objectieve inhoud heeft, treedt bij de *didactiek* meer het subjectieve naar voren.

De methodiek brengt de stof uit de boeken tot de leerling; de didactiek is het *levende* deel van het onderwijs, waarin de stof door de onderwijzer of leraar tot de leerling gebracht wordt.

Het gemeenschappelijke van de begrippen methodiek en didactiek kunnen we in een figuur het best aanduiden door een „overlapping", een gedeeltelijk over elkaar heen grijpen van de gebieden (zie fig. 1). In elk dier gebieden is de structuur verschillend.



Fig, 1

Het subjectieve heeft nu eenmaal fijner nuancering dan het objectieve. Dienovereenkomstig kan men in het gemene deelgebied van methodiek en didactiek — vaak genoemd het terrein van *de speciale didactiek*, dat n.l. betrekking heeft op een bepaalde leerstof — onderscheiden zowel een *grofregeling*, herkomstig van de methodiek, als een *fijnregeling*, herkomstig van de didactiek (fig. 2).

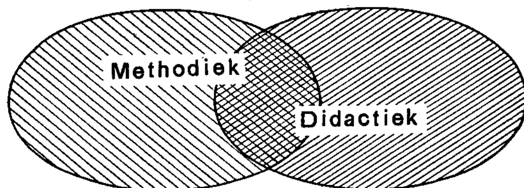


Fig. 2

Deze onderscheidenheid nu gaf mij aanleiding om in stelling 4 onder *methodiek* onder te brengen dat gedeelte, dat betrekking heeft op leerprogramma, omvang, aard en indeling van de leerstof

e.d. en onder *didactiek* de geheel andere instelling van de leraar, de aanbieding van de leerstof e.d.

Toen Dr Wansink op een bijeenkomst van de wiskunde-werkgroep W.V.O. in Mei van dit jaar sprak over de bemoeiingen van de wiskunde-werkgroep inzake de sanering van het meetkunde-onderwijs, stelde hij de problematiek scherp, toen hij beweerde, dat het eigenlijk om twee hoofdvragen gaat, n.l.:

a. de *methodische* vraag, hoe we een aanvaardbaar minimumprogramma voor de meetkunde moeten opstellen;
b. de *didactische* vraag, hoe we *dit* minimumprogramma tot het geestelijk eigendom van jonge leerlingen kunnen maken.

Laat ik zijn formulering, maar nu met betrekking tot ons vraagstuk van deze conferentie, overnemen en uitspreken, dat het in hoofdzaak gaat om:

a. de *methodische* vraag, hoe we een aanvaardbaar minimumprogramma voor ons wiskundeonderwijs voor de niet-mathematische richtingen (voor elk der richtingen Gymn. A, H.B.S. A, M.M.S. en Ulo A afzonderlijk) kunnen opstellen;
b. de *didactische* vraag, hoe we dit minimumprogramma tot het geestelijk eigendom van de leerlingen van die afdelingen kunnen maken.

Wanneer we spreken van een *minimum-programma*, moeten we echter wel bedenken, dat we hiermee niet bedoelen een programma aan te geven, dat heel precies de leerstof opnoemt, die we *moeten* behandelen. Ik zou dit zeker niet willen voorschrijven, vooral niet waar in sommige afdelingen (H.B.S. A en M.M.S.) geen eindexamen in het vak wiskunde ons opjaagt en we volkomen vrij zijn in de keuze van de leerstof, echter daarbij wel een zekere benedengrens èn bovengrens in acht nemende. We moeten n.l. streven naar de opstelling van een programma (leerplan) voor wiskunde, dat

1. zoveel wiskunde geeft, dat het juist genoeg is, om nog waardevol te zijn in verband met de verschillende doelstellingen dezer afdelingen (*onderste grens*);

2. niet te uitgebreid is voor het bevattingsvermogen dezer in doorsnee niet mathematisch aangelegde leerlingen (*bovenste grens*).

In onze formulering van daar straks, waar we gewaagden van een *aanvaardbaar minimumprogram*, zouden we dus misschien nog beter kunnen spreken van een *verantwoord program*, waarbij dus de aanduiding „verantwoord” zowel op een boven- als op een benedengrens wijst.

Ik hoop in 't voorgaande er in geslaagd te zijn U duidelijk te hebben gemaakt, *dat* er een andere methodiek en een andere didac-

tiek noodzakelijk is voor het wiskunde-onderwijs aan de niet-mathematische richtingen. Het moge schijnen, dat deze bewering „een open deur intrappen” is, dat deze dingen wel zo vanzelfsprekend zijn, *feit* is intussen, dat in de pracrijk aan vele scholen en door vele docenten toch nog maar steeds met deze andersoortigheid en andersgerichtheid geen voldoende rekening wordt gehouden.

Hoe die andere methodiek en die andere didactiek voor elk der afdelingen Gymn. A, H.B.S. A, M.M.S. en Ulo A moet worden uitgewerkt, *dat* is een zaak, die door de coreferenten naar voren zal worden gebracht en ik mag in mijn algemene inleiding niet te veel op hun terrein komen. Uit de mij vooraf toegezonden syllabi en stellingen heb ik de indruk bekomen, dat daarin zeer concrete punten zijn genoemd, die ons voor het in die afdelingen te geven wiskunde-onderwijs werkelijk een stap verder zullen brengen, zowel op het terrein van de methodiek als op dat van de didactiek.

Het complex van de *methodische* vragen dient in de eerste plaats onderwerp van bespreking te zijn in de georganiseerde vakgroepen (Wimecos, Liwenagel, de wiskunde-werkgroep van de W.V.O., de contactcommissies V.H.M.O. van de verschillende Paed. Studiecentra), van wie in dezen voorstellen moeten uitgaan aan Inspectie en Departement (stelling 5). Dit gebeurt ook reeds. Ik moge b.v. wijzen op het „Rapport betreffende het wiskunde-onderwijs aan de H.B.S. A”, uitgebracht op 27 Dec. 1952 door een door het bestuur van *Wimecos* benoemde commissie, bestaande uit de heren Pleysier, Gribnau, Kouwenhoven en Dunnebier, en dat op de Algemene Vergadering van Wimecos van 5 Januari 1953 te Amsterdam in bespreking is gebracht en door de vergadering is aanvaard. In dit rapport (gepubliceerd in Euclides 28e Jg. 1952/53 VI), waarop ik straks nog nader terugkom, treft ons de van de H.B.S. B geheel losgemaakte leerstof, die men nuttig en nodig wenst in het H.B.S. A programma voor wiskunde op te nemen.

Ook wijst ons medelid P. J. van Albada in zijn artikel „De wiskunde voor de niet-mathematische richtingen” (gepubliceerd in Euclides 28e Jg. 1952/53 I) terecht op het nog veel voorkomende euvel, dat wij, wiskundeleraren, in de practijk bij de keuze van de leerstof voor H.B.S. A en Gymnasium A maar al te veel nog rekening houden met wat we voor de B's denken nodig te hebben. Speciaal in de onderbouw moesten we ons veel meer rekenschap er van geven, dat daar ook leerlingen zitten, die later de H.B.S. A-, Gymn. A-, of M.M.S.-richting zullen volgen. Dit gebeurt helaas maar al te weinig.

Hij bezigt het niet onaardige beeld, dat wij met de B's per

sneltrein van Amsterdam naar Haarlem rijden en onderweg de A's in Halfweg afhaken, inplaats van ze b.v. naar Zaandam te brengen.

Hetzelfde gebeurt, in nog sterkere mate, op de Uloscholen, vaak uit een oogpunt van examenpolitiek(!), waar de A's eerst in 't laatste jaar, soms nog na het z.g. tentamen in Maart, worden afgehaakt, nadat ze 3 of 3½ jaar *precies hetzelfde* wiskunde-onderwijs (methodisch en didactisch) hebben gevolgd als de B's. Op dit euvel wijst ook Dr van Gelder in enige van zijn stellingen (Stelling 3 en 7) in het referaat „Het wiskunde-onderwijs op de Ulo school".

Deze dingen moeten veranderen en dat kan alleen door de straks genoemde organiaties aangepakt worden, door voorstellen in te dienen bij de officiële instanties (Inspectie en Ministerie van O. K. en W.).

Gelukkig hebben we thans niet te klagen, dat deze organisaties te weinig actief zijn. We vermeldden reeds de actie van Wimecos met betrekking tot de wiskunde op de H.B.S. A. Voor wat betreft de M.M.S. mogen we hier met grote voldoening melding maken van de door het Bestuur van de Vereniging van Directrices (Directeuren) van scholen van M. en V.H.O. voor meisjes thans ondernomen pogingen, om deze zaak in een brede opzet (n.l. voor alle exacte vakken) tot een bevredigende oplossing te brengen. Men is daar thans zo ver, dat men via een enquête, gezonden aan 85 H.B.S.-en voor meisjes en afdelingen M.M.S. aan Lycea en H.B.S-en, een overzicht heeft verkregen van de urentabellen en de gebruikte leerboeken voor deze vakken aan deze scholen. De volgende, bereids gedane stap is de benoeming van commissies voor elk der vakken, die met behulp van dit enquêtemateriaal op korte termijn voorstellen aan het Bestuur zullen uitbrengen over een mogelijk verantwoord programma voor elk der vakken en die de vermelde leerboeken op hun bruikbaarheid zullen toetsen.

Mijnheer de Voorzitter, ik verwacht van deze arbeid een stimulans in de goede richting. Want speciaal voor de wiskunde op de jonge M.M.S. — U zult dat morgen uit de inleiding van de Heer Krooshof nog wel nader vernemen — verkeren we, wat de methodiek en ook de didactiek betreft, nog in het beginstadium.

Ik kom nu tot mijn 6e *stelling* in zijn oorspronkelijke formulering:

De didactische vragen liggen meer op het gebied van de paedagogisch-didactische opleiding van de leraren, ofschoon dit niet uitsluit, dat ook de in stelling 5 genoemde kringen hier een taak hebben.

Deze laatste toevoeging is van essentieel belang, want als men opleiding hier verstaat alleen bedoelende voor aanstaande leraren,

dan zouden we moeten wachten tot de volgende generatie leraren in onze scholen hun intrede hebben gedaan. En deze zijn, ook na hun didactische vóóropleiding — een gelukkige verbetering na de totstandkoming van het bekende K.B. van 28 Aug. 1952 — zeker nog niet in staat aan de grote didactische omvorming relief te verlenen.

Misschien ware het dus beter die stimulerende taak van de *tegenwoordige* wiskundedocenten in mijn stelling voorop te plaatsen. De volgende generatie leraren zullen toch ook hun opleiding, althans de didactische, van de tegenwoordige moeten ontvangen en door deze in de didactische problemen moeten worden ingeleid.

Om misverstand te voorkomen, furmuleren we dus stelling 6 beter aldus:

De didactische vragen liggen op het terrein van de paedagogisch-didactische bezinning van de in functie zijnde leraren en van de paëdagogisch-didactische vooropleiding van de aanstaande leraren, terwijl ook de in stelling 5 genoemde kringen hier een taak hebben.

Mijnheer de Voorzitter, ik zie als de belangrijkste taak van onze Wiskunde-werkgroep thans het met elkaar zoeken naar de oplossingen van de hier liggende *didactische* problemen.

Hoe nuttig en belangrijk het ook is, dat onze wiskunde-werkgroep de laatste jaren zich intens heeft bezig gehouden met de opstelling van minimumprogramma's (dus op 't gebied van de *methodiek*), we staan nu voor een nog belangrijker opgave, n.l. zoals we straks formuleerden, *hoe* we die minimumprogramma's tot het geestelijk eigendom van de leerlingen kunnen maken. Per slot van rekening kunnen ook de straks genoemde andere organisaties (Wimecos, Liwenagel, Ver. Directrices en Directeuren van Midd. Meisjesscholen e.a.), die meer *organisaties* zijn in de volle betekenis van het woord en dus meer schakelingen in het grote onderwijsorganisatiecomplex: Schoolwetgeving — Departement, ter oplossing van de *methodische* vragen nuttig werk verrichten. Maar de W.V.O. (de naam New Education Fellowship zegt het beter) is niet zozeer een organisatie, als wel een *beweging*, een beweging van „gezworenen", als ik het zo eens zeggen mag, wien het heilige ernst is, dat ons onderwijs- en opvoedingssysteem doorstroomd moet worden met nieuwe ideeën, aangepast aan de tegenwoordige tijd en aan de nieuwe inzichten, die de moderne psychologie met betrekking tot rijpingsphasen, intelligentieniveau's, bevattingsvermogen e.d. met onbetwistbare zekerheid hebben vastgelegd.

Ofschoon onze groep nog klein in getal is, het kan een Gideonsbende zijn, die de andere collega's, die nog op een afstand staan,

aanspreekt, aanvuurt en op de duur — misschien op de lange duur — meekrijgt. Wij behoeven daarom nog niet irenici te zijn, die voor phantasten worden uitgekreten. Laten we nuchter blijven, maar bezield met een ideaal, een *didactisch* ideaal, om het aan ons toevertrouwde wiskunde-onderwijs in alle afdelingen in de mathematische, zowel als in de niet-mathematische, aan haar verschillende doelstellingen in elk der afdelingen te doen beantwoorden.

Wanneer wij, ouderen, zowel individueel, als in onze studiekringen in de wiskunde-werkgroep der W.V.O., Wimecos e.d., dit enthousiasme weten op te brengen en het weten over te dragen aan de generatie leraren, die ons zal opvolgen, hetzij we rechtstreeks bij de opleiding dezer aanstaande leraren zijn betrokken, hetzij door andere contacten met hen in aanraking komen, dan behoeven wij de toekomst van het wiskunde-onderwijs aan onze scholen voor V.H.M.O. niet donker in te zien.

Mijnheer de Voorzitter, ik zou hier kunnen eindigen — en eigenlijk ook moeten eindigen na een ontboezeming, die men gemeenlijk aan 't slot uitspreekt — en aan de coreferenten Dr Vredenduin, Krooshof en Dr v. Gelder verder overlaten hun visie op het probleem van de wiskunde op het Gymnasium α, resp. op de M.M.S. en op de Ulo A ten beste te geven.

Maar dan zou het probleem van *de wiskunde op de H.B.S. A*, dat juist de laatste tijd door het bekende rapport Pleysier c.s. zeer actueel is geworden, niet aan de orde komen. Daarom meende ik goed te doen, ten einde een discussie hierover mogelijk te maken, in een laatste stelling enige uitspraken over het wiskunde-onderwijs op de H.B.S. A te poneren.

Wel is waar valt dit buiten mijn eigenlijke, meer algemene, opdracht. U gelieve het dus als een toegift te beschouwen, zoals ook aan een proefschrift een aantal — maar dan verplichte — stellingen worden toegevoegd. De ervaring leert echter, dat juist deze stellingen, wegens hun gedurfde redactie en inhoud, meestal een interessant, soms fel debat uitlokken. Moge dat hierbij ook het geval zijn. Dan is de wiskundeknuppel in het hoenderhok der H.B.S. A gegooid en we zullen dan maar afwachten wat daarvan het gevolg zal zijn.

Hier volgen dan enige uitspraken over de wiskunde op de H.B.S. A:

a. Een eerste en *minimale* eis is, dat het wiskunde-onderwijs aan de H.B.S. A weer wordt gegeven in de 4e en 5e klas en wel in beide gedurende één uur per week (Rapport Drs Pleysier c.s., 5 Januari 1953).

b. Het zou zelfs *wenselijk* zijn, met het oog op latere studie in de Handelswetenschappen, Economie e.d. dit te verhogen tot 2 uur in de 4e en 1 uur in de 5e klasse.

c. Echter *geen verplicht eindexamenvak* er van maken, om de nadelige gevolgen van een ongezonde training en overlading van het eindexamen te voorkomen.

d. *Omschrijving van de leerstof* voor deze beide klassen tezamen: Herhaling van de leerstof der 2e en 3e klas, finantiële rekenkunde, (hetgeen inhoudt: samengest. interestrekening, annuïteiten, rentabiliteitswaarden) en grafische voorstellingen, terwijl ook met het oog op latere studie voor Economie, Statistiek e.d. *enige* kennis van differentiaal- en integraalrekening zou kunnen worden aangebracht.

Me dunkt, mijnheer de Voorzitter, dat deze uitspraken nog al bescheiden klinken.

Desniettemin hoop ik, dat ze toch de moeite waard zijn om er een bespreking aan te wijden.

Dr H. Turkstra.

ENKELE GEDACHTEN OVER HET WISKUNDE ONDERWIJS OP DE MIDDELBARE MEISJESSCHOOL.

Bij de voorbereiding van deze inleiding op een gedachtenwisseling over het wiskunde-onderwijs op de MMS, mocht ik inzage hebben van de antwoorden, die verkregen waren op een enquête, ingesteld door de Vereniging van Directrices en Directeuren van Scholen voor M. en V.H.O. voor Meisjes.

Wanneer men de leerplannen, de gebruikte boeken en de urentabellen van deze scholen bestudeert, ziet men duidelijk dat het wiskunde-onderwijs op de MMS nog niet zijn eigen vorm gevonden heeft. Sommige scholen hebben wel getracht tot een eigen vormgeving te komen, maar teveel krijgt men nog de indruk, dat het programma voor de MMS een soort verzwakt H.B.S.-B programma is. Ook de boekenlijsten wijzen op een geringe eenheid van opvatting. Op 25 scholen worden 16 verschillende Algebra-boeken gebruikt en 11 verschillende Meetkunde-boeken. Bij deze boeken zijn er slechts twee, die speciaal voor het wiskunde-onderwijs op de MMS geschreven zijn. Over deze boeken zal ik graag straks iets meer zeggen.

Wat de uren-tabellen betreft, vier van deze scholen geven wiskunde in de vierde klas, één van deze ook nog in de vijfde. Alle andere geven alleen in de eerste, tweede en derde klas wiskunde. Bij de meeste scholen is dan de eerste en dikwijls ook nog de tweede klas een afdeling van de onderbouw, zodat de toekomstige MMS leerlingen daarin de wiskunde krijgen tezamen met hen, die naar de H.B.S.-B of gymnasiumafdeling zullen gaan. In deze gevallen bedraagt het aantal lesuren dan in de eerste klas 5, waarna dan in de speciale MMS-afdeling het aantal uren in de tweede en derde klas meest 2 bedraagt, bij enkele scholen 3, bij een enkele in de derde klas ook 1.

Het is dus zeker belangrijk zich te gaan bezinnen op de juiste vorm, die het wiskunde-onderwijs op de MMS zal moeten vinden en zich af te vragen met welk doel we deze meisjes wiskunde zullen leren, wat de leerstof zal moeten zijn en hoe dit onderwijs het best tot zijn recht komt.

A. *Doel van het wiskundeonderwijs op de MMS.*

Het eerste, dat men zich kan afvragen, is: Hebben de meisjes na het verlaten van de school wiskunde nodig, m.a.w. waar blijven de leerlingen van de MMS na het behalen van het einddiploma. Van 95 leerlingen, die in de jaren 1949 t/m '53 de MMS-afdeling van de Gem. H.B.S. v. Meisjes te Groningen verlieten, ontvingen we de volgende opgave van de richting, waarin ze direct na het verlaten van de school verder gingen. Het is ons niet bekend of ze daarbij gebleven zijn.

Huishoudschool	22	Heilgymn. en mass. . . .	3
Landb.huish.sch.	1	Kunstnijverh.sch.	3
Maatsch. werk.	4	Opl. muziek	1
Verpleegster	2	secretaresse of adm. . . .	15
Doktersass.	2	naar het buitenland . . .	7
Analyste	6	talenstudie MO	7
Kweeksch. v. Ond. . . .	9	staatsexamen	3
Kleuterond.	2	journaliste.	2
Gymnast. lerares.	3	leeszaalassistente	3

In zijn boek „Inleiding tot de studie der Paedagogische Psychologie van de middelbare-schoolleeftijd" (4e druk) geeft Prof. Langeveld wanneer hij het probleem van de transfer bespreekt, dus de vraag in hoeverre er overdracht is van geoefendheid, verworven op het ene gebied, op andere formeel gelijksoortige gebieden, een indeling van zg. transfer-kringen:

	Voorbeelden:
1e. de kring van het konstruktief-theoretische,	mathematica
2e. de kring van het interpretatorisch theoretische,	geschiedschrijving
3e. de kring van het spekulatief-extatische,	kunstbeoef. sommige filosof.
4e. de kring van het maatschappelijk praktische,	handel, pastorale arbeid
5e. de kring van het experimenteel praktische,	techniek, exp. psychologie.

Voor de kring van het maatschappelijk praktische geeft hij nog de onderverdeling in *a*) die van het kommercieel-ekonomische en *b*) die van het medemenselijke.

Beschouwen we nu de beroepen of studie-richtingen, die de meisjes met MMS-diploma gekozen hebben, dan zien we dat deze hoofdzakelijk tot de 2e, 3e en 4e kring behoren en juist niet tot de eerste, waarin volgens Prof. Langeveld de studie van de wiskunde valt en waarin de transfer van de bij de wiskunde verkregen bekwaamheden een rol speelt.

Belangrijk is hierbij de opmerking, dat er tussen de gebieden onderling een negatieve transfer bestaat: „De man van de mede-

menselijke maatschappelijke practijk komt moeizaam tot het theoretische in het algemeen, hoewel zijn gezichtskring ten zeerste verrijkt wordt door kennis te nemen van het interpretatorisch theoretische", zegt Langeveld als voorbeeld van de negatieve transfer tussen de kringen. Maar, zegt hij ook: „Die negativiteit is gegradueerd: Niet overal is de transfer even negatief . . . de school dient echter te weten, dat bijv. een niet konstruktief-theoretisch aangelegd kind in de tekstinterpretatie een voorbereiding vindt, *die het bijv. de mathematica als zinneloos en willekeurig doet zien.*"

Hoewel natuurlijk het probleem van de transfer niet zo eenvoudig is als dit korte citaat uit het boek van Prof. Langeveld zou doen vermoeden, (ook de aard van de begaafdheid van de leerling speelt een grote rol) toch wordt het door beschouwingen als deze wel dubieus of we wel zinvol werk doen met ons wiskunde-onderwijs op de MMS. Het zou helemaal geen gekke vraag zijn, of we dit vak maar niet voor deze school moesten afschaffen. Ik meen echter, dat er voldoende redenen zijn de wiskunde op de MMS, zij het in een voor dit schooltype aangepaste vorm, te handhaven.

Aan de collega's van mijn school heb ik de vraag voorgelegd, welke onderdelen van de wiskunde zij nodig achten ter voorbereiding van de door hen gedoceerde vakken. De tekenleraar wenste enige kennis van Stereometrische lichamen, ook een tekenwijze daarvan, bijv. een soort scheve projectie, de lerares voor Frans noemde Pascal als contactpunt voor haar vak en de wiskunde en inderdaad bestaat de mogelijkheid aan haar wens tegemoet te komen (daarover straks) en de lerares voor natuurkunde gaf me een heel verlanglijstje, dat ik hierbij overneem:

Meetkunde: Eigenschappen van evenwijdige lijnen gesneden door een derde, constructie van middelloodlijn en bissectrice, congruentie van driehoeken, begrip van de afstand van een punt tot een lijn, bekendheid met de namen en de voornaamste eigenschappen van de bijzondere vierhoeken, voornaamste eigenschappen van de cirkel.

Rekenkunde en Algebra: Bewerkingen met en eigenschappen van rekenkundige breuken, o.a. vaardigheid in het snel herkennen van gemeenschappelijke factoren in teller en noemer, zoals bij 363/484. Het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen en vooral vaardigheid in het herkennen van gemeenschappelijke factoren in alle termen van beide leden. Begrip van recht en omgekeerd evenredig.

Zoals men ziet worden de meeste van deze punten reeds in de eerste klas behandeld, vooral als deze behoort tot de onderbouw, zodat in de volgende klassen naast het repeteren van deze leerstof, tijd overblijft voor andere onderwerpen.

Van de directeur van de Rijkskweekschool te Groningen, die ik vroeg welke onderwerpen van de wiskunde vereist werden voor de toelating van meisjes met MMS-diploma tot zijn school, kreeg ik het volgende verblijdende antwoord:

„Ingaande 1 September 1954 valt ook de derde klasse van de Kweekschool onder de nieuwe Kweekschoolwet. Deze vindt de ontwikkeling, die de scholen voor V.H.M.O. geven principieel voldoende om daarop de gespecialiseerde vak-opleiding voor de toekomstige onderwijzer(-es) te baseren. Hierdoor vervalt de noodzaak om deze meisjes een toelatingsexamen af te nemen in de wiskunde. In de klassen III en IV van de Kweekschool *kan* Wiskunde als keuzevak op het leerplan voorkomen."

Gaarne haal ik uit deze brief nog aan: „Voor het niet-wiskundig-aangelegde meisje geeft de nieuwe Kweekschoolwet betere kansen en voor ons Lager-onderwijs kan ik slechts hopen, dat vele van uw oud-leerlingen het mooie beroep van onderwijzeres zullen kiezen."

In verband met het natuurkunde-onderwijs en mogelijk ook voor cosmographie is er dus een minimum hoeveelheid leerstof, die we moeten geven. Maar dan blijft de vraag: Als we daarboven meer zullen geven met welk doel zullen we dat dan doen? Met deze vraag hangen immers twee andere samen: Wat zullen we dan verder geven en in welke klassen moet dat gebeuren?

De volgende doelstellingen wil ik daarom gaarne wat nader met u bekijken:

1. We zouden wiskunde kunnen geven met het oog op de transfer,
2. met het oog op het practisch nut dat onze leerlingen er later van zouden kunnen hebben,
3. omdat wiskunde een der onmisbare cultuurvormende elementen van deze en de toekomende tijden is,
4. omdat wij het gewenst vinden de leerlingen te doen kennismaken met een logisch wetenschappelijk systeem,
5. omdat wij het wiskunde-onderwijs onmisbaar achten voor de vorming van onze leerlingen tot persoon.

Natuurlijk zouden deze doelstellingen door andere vervangen kunnen worden, maar waarschijnlijk zijn deze toch wel de grondslag van verschillende leerplannen, behalve dan misschien, dat een zeer veel aangehangen doelstelling is: We geven wiskunde omdat het nu eenmaal in het leerplan staat en we zullen dan onze leerlingen zo ongeveer hetzelfde leren, als wij vroeger hebben gehad.

1. *Transfer.* U zult het me hoop ik niet kwalijk nemen, als ik hierover geen mening uitspreek. Daarvoor ben ik te weinig deskundig en de discussie tussen Mevr. Ehrenfest en Prof. Freudenthal

toont wel aan, dat de „geleerden" het over dit punt nog lang niet eens zijn. We kunnen, meen ik, wel zeggen, dat de waarde van deze transfer zo twijfelachtig is, dat het niet daarom kan zijn, dat we wiskunde geven op de MMS.

2. *Practisch nut.* Verschillende antwoorden uit bovengenoemde enquête wijzen erop, dat men gemeend heeft zodanig wiskunde onderwijs te moeten geven dat daar later in de practijk van geprofiteerd kan worden. Zo staat in het leerplan van de school te Harlingen: „De te behandelen stof wordt zo eenvoudig mogelijk gehouden, terwijl zoveel mogelijk aansluiting wordt gezocht bij vraagstukken uit de practijk."

Als voorbeelden, die ik ter nadere toelichting gevraagd heb, werden o.a. genoemd: opgaven van de soort rekenopgaven, zoals die door het Nutsseminarium wel gepubliceerd zijn (verbruik van gas bij verschillende tarieven, pensiontarieven met opgaven over een zo voordelig mogelijke vacantie), samengestelde interestrekening met gebruik van gecopieerde rentetafels, voor de meetkunde: het beleggen van een kamer met vaste vloerbedekking, ladder tegen de muur (Pythagoras), het maken van een lampekapje (afgeknotte kegel), verder wordt dan nog genoemd het tekenen van allerlei grafieken. Dit vinden we ook in de leerplannen van andere scholen. Arnhem noemt bijv. Financiele rekenkunde, waarbij een boekje voor het Ulo gebruikt wordt. Veel scholen noemen uitdrukkelijk het hoofdrekenen.

Nu is het natuurlijk niet goed mogelijk een scherp onderscheid te maken tussen het vak rekenen en het vak algebra resp. wiskunde. Men kan beweren, dat rekenonderwijs ook wiskunde-onderwijs is en het practisch nut van veel der hierboven genoemde punten kan ik niet ontkennen. Ik acht het gewenst, dat toekomstige huisvrouwen een keuze kunnen maken uit verschillende tarieven van de gasfabriek. Het lijkt me heel nuttig, dat onze meisjes later een grafiek kunnen lezen, dat ze begrip hebben van rente-berekeningen, van hypotheken, van verzekeringstarieven. En ik heb dan ook zelf de samengestelde interestrekening wel behandeld in de MMS, waarbij ik het leren hanteren van een tabel mede nuttig vond. Maar wanneer we het hierbij zouden laten, wanneer het wiskunde-onderwijs zich zou beperken tot de toegepaste wiskunde,dan geloof ik, dat we juist iets te weinig zouden doen. Maar daar kom ik graag straks op terug.

3. *Wiskunde als cultuurvormend-element.* Dat onze huidige cultuur voor een groot deel beheerst wordt door de techniek en dus door

de wiskunde, zal wel zonder meer duidelijk zijn. Echter is de wiskunde, die ten grondslag ligt aan veel technische toepassingen zo gecompliceerd, dat zelfs de HBS-B niet aan de bespreking daarvan toekomt. Toch moet het, dunkt mij, mogelijk zijn iets, heel weinig, te laten zien van de invloed van de wiskunde,bijv. in de betekenis van de kunde van het uiterst efficiente rekenen. Als voorbeeld denk ik daarbij aan de invloed van de logarithmen. Enkele scholen noemen in hun leerplan: iets over logarithmen. Met welk doel ze dat doen is mij niet bekend. Maar persoonlijk zou ik er voor voelen deze behandeling van de logarithmen te doen plaatsvinden om daaraan te demonstreren, hoe een eenvoudige stelling (als je twee machten van hetzelfde grondtal wilt vermenigvuldigen, dan kun je de exponenten optellen) de grondslag kan vormen van een enorme vereenvoudiging van het rekenen en de aanleiding kan zijn allerlei instrumenten daarvoor te vinden (rekenlat, telmachines enz.)[1])

4. *Logisch wetenschappelijk systeem.* Ter verdediging van het wiskundeonderwijs vinden we dikwijls aangevoerd, dat dit de gelegenheid biedt, de leerlingen een systeem van stellingen voor te zetten, dat voorbeeldig is, wat betreft de logische opbouw daarvan. Ik meen, dat we deze doelstelling gerust kunnen laten vallen voor onze MMS. In de eerste plaats zou het onderwijs met dit doel pas tot zijn recht komen in de hogere klassen, waar nu juist op de MMS geen wiskunde wordt gegeven.

Maar al spoedig kan het onderwijzen van zo'n systeem ontaarden in wat ik eens heb gelezen „Dressur auf die richtige formale Behandlung". Ik vrees dat nogal dikwijls, vooral in de eerste klassen, het meetkunde-onderwijs bestaat uit een dergelijke dressuur met als gevolg een automatisering, die niet alleen de lust tot wiskundestudie doodt, maar bovendien dikwijls zodanig remmend werkt op het eigenlijke begrijpen, dat dit, ook in de hogere klassen niet of slechts na veel strijd weer terug komt. We moeten over het gevaar van deze dressuur niet te licht denken, want niet alleen op de middelbare scholen bestaat deze, maar niet minder op de lagere scholen bijv. bij het rekenonderwijs. U zult misschien ook ervaren hebben, dat het rekenen met breuken dikwijls heel gebrekkig gaat, ook bij de B-leerlingen, zelfs in de hogere klassen (niet voor niets staat dit op het verlanglijstje van de natuurkunde-docente). Het rekenen met breuken, niet als hoeveelheden, maar als getallen, is op de lagere school er in gedresseerd, tot de meeste kinderen op het toe-

[1]) Zie ook mijn artikeltje onder de titel „De dominee en de Rekenliniaal" in het September-nummer van het Mededelingenblad van de Wiskunde-Werkgroep.

latingsexamen er weinig fouten mee maken. Maar het begrip ontbreekt meestal totaal en is zeer moeilijk weer aan te brengen. De operatie breuk maal breuk is minstens zo moeilijk als de vermenigvuldiging van twee negatieve getallen en wordt dikwijls even weinig begrepen.

5. *Invloed van het wiskunde-onderwijs op de vorming van de persoon.* De persoon van onze leerlingen wordt mede door ons gevormd en door ons onderwijs. Naast het denkleven ontwikkelen zich tijdens de schooljaren gevoels-en wilsleven en wij beinvloeden deze ontwikkeling ook door ons wiskunde-onderwijs. Wanneer we hierboven spraken van remmingen veroorzaakt door een dressuur, dan zijn die remmingen niet alleen van intellectuele aard. Weerstanden worden opgeroepen, die de structuur van de persoon van onze leerlingen mede bepalen. Daarom moeten we ons niet alleen afvragen, wat we moeten doen om door ons wiskunde onderwijs de persoon van onze leerling te helpen vormen, we moeten minstens zo goed weten wat we hebben na te laten. Daartoe hoort m.i. alles wat de onlust in de wiskunde zou kunnen opwekken. Laten we liever aan deze meisjes geen wiskunde onderwijs geven, dan dat we de oorzaak zouden zijn, dat ze dit vak hartgrondig leren verfoeien of er met onverschilligheid tegenover zouden staan. Verder hoort daartoe alles wat de automatisering in de hand werkt en het napraten van onbegrpen waarheden. Er zijn al genoeg mensen, die met een air van kwasi-wetenschappelijkheid allerlei kennis tot zich nemen zonder ooit de behoefte te gevoelen deze ook inderdaad te doorgronden. Niets is gemakkelijker dan de leerlingen een aantal stellingen zonder bewijs of formules zonder afleiding voor te zetten en ze daar toepassingen van te laten maken, die de indruk geven, dat ze wat kennen. Verschillende leerboekjes van scholen met beperkt wiskundeprogramma lijden aan dit euvel.

Wanneer we dus door ons wiskunde onderwijs positief willen medewerken aan de vorming van onze leerlingen, dan zou dat kunnen bestaan:

„1. in het aanwennen van methodisch, geordend, voorzichtig, zelf-critisch denken,

2. in het aanwennen van exact woordgebruik.

3. in het kweken van verantwoordelijkheid voor uitgesproken beweringen" (Dr. Dijksterhuis)

maar daarnaast zou ik toch ook nog een paar andere dingen willen noemen:

4. het meebeleven van de verwondering over de wondere bouw

van getallen en figuren, zoals de mensheid die steeds weer uitgedrukt heeft in de magische betekenis, die er aan werd toegekend. Ik denk hier aan de school van Pythagoras, waarover enkele boeiende lessen te geven zijn, of aan de magische betekenis, die men aan de cirkel en het pentagram heeft toegekend.

5. Nauw hiermee verwant is het schoonheidsbeleven, dat soms in de wiskunde kan optreden. In mijn lokaal hangen enkele litho's van de graficus Escher. Ik geloof, dat weinigen zoals hij gegrepen zijn door de fascinatie van de regelmatige veelhoek en het regelmatige lichaam. Telkens vinden we die in een dikwijls sterk symbolische betekenis in zijn werk terug. Ik ben eens met een klas naar een tentoonstelling van zijn werk geweest en alle meisjes waren diep onder de indruk, niet in het minst door de betovering van zijn dikwijls wonderlijke wiskundige constructies. Zelfvervaardigde regelmatige lichamen (en handige leerlingen spelen het heus wel klaar een regelmatig twaalf- of twintigvlak te maken) kunnen deze schoonheidsbeleving wel stimuleren, mits van ons ook maar het nodige enthousiasme uitgaat.

6. Dan is er nog het spelelement in de wiskunde. Er zijn spelregels gesteld, rekenvoorschriften, stellingen. Nu spelen we het spel van de zuivere toepassing daarvan. Ik geloof, dat het verlangen naar een som die „mooi" uitkomt samenhangt met dit willen spelen volgens de spelregels en dan te winnen. En ook denk ik, dat het hierdoor komt, dat soms zwakke leerlingen toch graag wiskunde bedrijven, ook meisjes. Verschillende malen is mij door ouders verteld, dat hun dochter het eerst de wiskunde-taak maakte, omdat ze dat zo „fijn" vond. We moeten onze wiskunde lessen niet altijd zo Hollands-serieus opvatten, maar ze ook dikwijls, misschien wel altijd, beschouwen als een spel, dat we met onze leerlingen spelen. Op de B-afdeling is het vaak de strenge plicht van de voorbereiding voor het examen, die ons spel een te ernstige achtergrond kan geven, maar waar we dat niet hebben, zoals op de MMS, laten we daar van harte de gelegenheid aangrijpen met onze leerlingen te spelen. Om misverstanden te voorkomen, de echte algebra en de echte meetkunde te spelen, hoe vreemd dat moge klinken.

B. *Conclusies uit deze doelstellingen getrokken voor het wiskunde-onderwijs op de MMS.*

U zult, hoop ik, inmiddels wel begrepen hebben, dat ik gaarne de wiskunde op de MMS handhaaf, vooral omdat ik meen, dat de wiskunde een vormende waarde heeft, die onze meisjes niet mogen missen.

De vraag is dus nu, wat deze wiskunde zal moeten omvatten. Nu stel ik bij het beantwoorden van deze vraag voorop, dat ik daarbij denk aan de gewone klassikale school. Progressieve scholen, waar men bijv. met een projectmethode kan werken zullen hun programma misschien op een geheel andere manier kunnen opstellen.

Het leerplan zal m.i. veel vrijheid moeten laten aan de docent. Een school in Den Haag schrijft: De onderwerpen, die behandeld worden in de 2e en 3e klas zijn niet officieel vastgesteld en worden dus gekozen door de docent, die in deze klassen les geeft. De onderwerpen hangen vooral af van het bevattingsvermogen van de leerlingen.

Het zal toch wel goed zijn, als er een zekere eenheid komt in de wiskunde-leerplannen van de MMS-scholen. Overleg hierover, zoals Dr. Turkstra dat voorstelt in zijn stelling 4 zal hier de aangewezen weg zijn.[1])

Enkele opmerkingen over een leerprogramma zou ik nog graag willen maken.

In de eerste klas en zeker voor een groot deel ook nog in de tweede verkeren mijns inziens de leerlingen nog in het stadium, waarin ze het meest zijn ingesteld op het zich toe-eigenen van feitenkennis. Ze hebben nog weinig zelfcritiek en zijn tevreden met de les te kennen, die ze zo nodig geheel uit het hoofd leren. Dit is, dunkt me, bij meisjes veel sterker het geval, dan bij jongens. Daarom acht ik de leerboeken die sterk op routinewerk ingesteld zijn zo buitengewoon gevaarlijk in deze klassen. Ze maken op de leerlingen de indruk, dat ze wat presteren, en dat de wiskunde de kunst is van een heleboel sommetjes te maken. Aan dit euvel lijden de boekjes van de Heer Kalkman.

Uit het voorbericht van deel I van zijn „Wiskunde voor de MMS" neem ik over:

„Bewijsvoeringen en stellingen zijn zoveel mogelijk vermeden. In de practijk blijkt, dat de leerlingen veel dingen intuitief aanvoelen en zich door routine eigen maken, die anders nodeloos tijd en moeite zouden vergen"

En verder: „In het meetkunde-deel is zodoende de nadruk gelegd op berekeningen, op het zuiver tekenen van figuren en op constructies. Men kweekt hiermee accuratesse aan en dat is een voornaam deel van de vormende waarde, die er op de MMS van de wiskunde uitgaat".

---

[1]) Een commissie, benoemd door de in de eerste alinea van deze inleiding genoemde vereniging, is hier mee bezig.

Wanneer nu de leerlingen trouw sommetjes gemaakt hebben uit dit boekje, dan kunnen ze allerlei berekeningen maken met graden, minuten en seconden (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) ze kunnen dan de oppervlakte en de inhoud van allerlei lichamen uitrekenen. Er is hun meegedeeld hoe de oppervlakte van een cirkel wordt berekend, hoe de *s*-formule voor de hoogtelijn luidt enz. en dat alles alleen om er sommetjes over te kunnen maken. Ik kan me voorstellen dat de meisjes in de eerste en tweede klas het graag doen, maar als het daarbij blijft, als dat wiskunde zou betekenen op de MMS dan acht ik dat volkomen zinloos.

Hier is de weg van de minste weerstand gezocht: De meisjes mogen graag rekenen? Wel, laat ze rekenen. Bewijzen vinden ze moeilijk? Wel, we laten de bewijzen weg.

De tijd, die het begrijpen van enkele noodzakelijke bewijzen vergt, die door de Heer Kalkman nodeloos geacht wordt, zou ik nu juist graag aan deze leerlingen willen geven. Daarom acht ik het in de eerste plaats noodzakelijk, dat het minimum programma, zoals dat bijv. in het verlanglijstje van de natuurkunde-lerares wordt opgesomd volledig behandeld wordt, dus zodanig, dat er niet alleen wordt gelet op het kennen maar in de eerste plaats op het begrijpen. Bewijzen mogen daarbij dus niet worden weggelaten. Alleen zal het behandelen van deze onderwerpen moeten gebeuren in een *langzamer tempo*, dan op de HBS-B. Daarom zal ook op de meeste scholen met een onderbouw wel gelden, wat een school in Enschede schrijft: „In 2M moet begonnen worden met veel van het in de klasse 1 behandelde te repeteren. daar hier de stof in een voor deze afdeling te snel tempo is behandeld." Het is dan echter belangrijk deze herhaling in een zodanige vorm te gieten, dat de leerlingen de indruk krijgen met een geheel andere leerstof bezig te zijn. Hiervoor is een geschikte keuze van oefenmateriaal noodzakelijk. Het zoeken daarvan vergt veel tijd en overleg.

Het bedoelde minimum-programma zal dus wel het grootste deel van de beschikbare tijd in de eerste twee klassen vergen. Wanneer in de 2e klas twee of drie uren per week beschikbaar zijn is het daarbij wenselijk gedurende een bepaalde periode achter elkaar alleen algebra te geven en daarna gedurende een zekere tijd meetkunde, alleen dan raken de leerlingen in de leerstof thuis.

In de derde klas kunnen we dan naast het zo nu en dan repeteren van de leerstof van het minimumprogramma enkele andere onderwerpen behandelen. De aard daarvan zal heel erg van de klas afhangen. Sommige zijn misschien wel zo rijp, dat we geen proefwerken hoeven te geven om daarmee de belangstelling voor ons

vak gaande te houden. (Het cijfer is helaas maar al te dikwijls de stok achter de deur, waarvan we ons bedienen om de leerlingen voor ons vak te interesseren, maar wie geeft er iets om deze interesse?) Inplaats van een proefwerk kunnen we ze dan bijvoorbeeld opdragen om onder onze leiding over het onderwerp, dat aan de orde is een studieverslag te maken. Als wij ze daarbij enige aanwijzingen geven omtrent de inhoud, als we de concepten eerst corrigeren en met hen bespreken en daarna van hen vragen het geheel in het net te zetten en in te binden in een aardig bandje, dan bereiken we, dat ze iets maken, dat bewaard wordt. Wanneer anderen allang vergeten zijn voor welk proefwerk ze ook al weer die 3 of die 8 kregen, hebben deze leerlingen nog steeds dit studieverslag, dat hen herinnert aan een tijd van interessant werken.

Onderwerpen hiervoor zouden kunnen zijn:

De logarithmen, de benodigde kennis van de oneigenlijke machten en de toepassing op de rekenliniaal.

Een meetkundige behandeling van de kegelsneden, waarbij vooral de constructie van de hyperbool met zijn asymptoten interessant is.

Samengestelde interestrekening met gebruik van rentetafels, opgaven over lijfrenten enz.

Een historisch onderwerp, bijv. het leven en enkele van de wiskundige werken van Pascal. Overleg met de lerares voor Frans kan een aardige samenwerking tussen dit vak en de wiskunde geven.

Doordat niet een examen ons op de MMS aan vele banden bindt, is het mogelijk veel in deze richting te experimenteren. Het zou belangrijk zijn als de docenten van deze scholen van deze experimenten kennis konden nemen.

Het tweede boek, dat voor zover ik weet met dat van de Heer Kalkman het enigste tweetal boeken vormt, dat voor de MMS geschreven is, nl. Wiskunde voor Middelbare Meisjesscholen door de Heer J. C. v. Velthoven voldoet beter aan de eisen dan het eerstgenoemde. Het eerste deel van dit boek bevat zo ongeveer het verlangde minimum programma. Het tweede handelt over talstelsels, worteltrekking, metriek stelsel, vormleer (oppervlakte en inhoudsberekeningen), meetkundige voorstellingen van getallen, functies, grafische voorstellingen.

Als bezwaren tegen dit boek zou ik willen aanvoeren, dat het eerste deel, voor wat de algebra betreft, haast weer vervalt in het andere uiterste en deze te sterk theoretisch opzet, zodat de jonge leerlingen overrompeld worden door een overvloed van eigenschappen. Het is moeilijk om voor de beide eerste klassen de juiste weg te vinden tussen alleen maar rekenwerk geven en alleen maar

theorie geven. Trouwens de MMS zonder onderbouw, die dus de wiskunde van het begin af geheel naar de aard van de school kan opzetten, moet mijns inziens in de eerste klas het aantal stellingen en bewijzen sterk beperken en vooral „spelend" beginnen: vouwen, plakken, construeren in de meetkundelessen en rekenend met gewone getallen in de algebralessen en komen tot het begrip van de wenselijkheid van de uitbreiding van het getallenmateriaal met negatieve getallen, machten en wortels. Deze dingen zijn haast niet in een boek vast te leggen, omdat tijdens de lessen de volgorde der onderwerpen als het ware geboren moet worden uit de gesprekken met de leerlingen.

Het tweede deel van het boek van de Heer v. Velthoven geeft telkens bij elk onderwerp een geschiedkundig overzicht. Helaas zitten daar nog al enkele onnauwkeurigheden in. Ook geeft de schrijver naar mijn smaak te veel namen en jaartallen. In anderhalve bladzijde over het getal π staan 15 namen van wiskundigen, die iets met dit getal uitstaande hadden.

Ondanks deze bezwaren, (tegen welk leerboek zijn die niet in te brengen?) acht ik het boek van de Heer v. Velthoven veel beter voor het onderwijs op de MMS geschikt dan dat van zijn collega Kalkman.

Slotconclusies:

De wiskunde heeft voor de leerlingen van de MMS zoveel betekenis, dat het als leervak moet worden gehandhaafd.

Het tempo waarin dit vak gedoceerd moet worden moet langzamer zijn dan op de HBS-B.

Het wiskunde onderwijs op de MMS mag niet ontaarden in een routinewerk.

De omvang van de leerstof moet in onderling overleg worden vastgesteld door de wiskunde docenten.

Echter moet de docent door een zeer soepel leerplan grote vrijheid behouden.

Deze vrijheid moet hem in staat stellen zijn leervorm aan te passen aan het karakter van de klas en samen met die klas de te behandelen onderwerpen te kiezen.

G. Krooshof.

DISCUSSIE.

Mej. Ir. E. Landeweer:

Het verheugt me, dat de heer Krooshof zo enthousiast is voor het onderwijs in de Wiskunde aan de meisjes van de M.M.S. Ook doet het me genoegen, dat hij erop wijst, dat dit onderwijs in een langzamer tempo moet worden gegeven.

Ik zou echter nog even willen terugkomen op hetgeen de heer K. heeft gezegd over de beroepen, die door de meisjes worden gekozen, en eveneens zou ik graag op het laatste punt van zijn betoog meer het accent willen leggen.

Allereerst wat betreft de beroepen, die de meisjes kiezen; 9 van de ruim 90 meisjes waren naar de kweekschool gegaan, 6 werden analyste. Dit percentage is toch niet zo erg laag.

Voor de toekomstige analystes zou het jammer zijn, als er op de M.M.S. te weinig Wiskunde gegeven werd. Dan is het nl. te verwachten, dat straks de Nederl. Chemische Vereniging de M.M.S. opleiding niet voldoende zal vinden voor een vrijstelling van het examen voor algemene ontwikkeling. De Ned. Chem. Ver. vindt hiervoor het M.U.L.O. A diploma voor de Wiskunde onvoldoende, en eist M.U.L.O. diploma met officieel examen Wiskunde; een schoolexamen hierin wordt niet geaccepteerd. Zo zouden we over enige jaren de toestand kunnen krijgen, dat eindexamen M.M.S. hier geldt voor niet voldoende algemene ontwikkeling, minder dan de M.U.L.O.

Wat de kweekschool aangaat: onze meisjes hebben na het eindexamen M.M.S. toegang tot de 3e klasse van de kweekschool. Indien de kweekschool in de 3e, 4e en 5e klasse geen Wiskunde meer geeft, zullen onze meisjes het onderwijs daar wel kunnen blijven volgen, ook al daalt het onderwijs in de Wiskunde op de M.M.S. op een laag peil. De wet zal haar waarschijnlijk dit recht van toegang tot de 3e klasse blijven toekennen. Dan krijgen we echter het bezwaar, dat later deze meisjes in de 1e klasse van de lagere school, waarin het onderwijs toch altijd aan vrouwen wordt opgedragen, het begin van het rekenonderwijs moeten geven. Het wordt dan zo, dat de grondslag van het rekenonderwijs op de lagere school gelegd wordt door personen, die geen of zeer weinig aanleg

in deze richting bezitten en hier weinig belangstelling voor hebben. En dat, terwijl op elk schooltype, en toch ook op de lagere school, het van belang is, dat de grondslag van een vak gelegd wordt juist door een van de beste docenten in dat vak.

Als op de M.M.S. het onderwijs in de Wiskunde op een te laag peil staat, zou het voor het onderwijs op de lagere school beter zijn onze M.M.S.meisjes niet tot de 3e klas kweekschool toe te laten. Ik zou het echter ten zeerste betreuren, indien voor deze beide beroepen, onderwijzeres en analyste, de toegang voor de meisjes met eindexamen M.M.S. practisch gesloten zou zijn.

Dan wilde ik graag nog iets zeggen over het onderwijs in de exacte vakken aan de M.M.S.

Mij werd destijds, aan 't begin van mijn loopbaan als lerares, voor mijn lessen Scheikunde aan een M.M.S.afdeling door de directrice gezegd: „Tracht de meisjes bij hun geestelijke nekvel te grijpen en ze omhoog te tillen." Na enige jaren Scheikunde onderwijs werden me de lessen voor Wiskunde in een 1e klasse meisjes opgedragen. En hiermee beginnend, vroeg ik me af: „Ik was toch vroeger ook een meisje en heb het toch ook gekund. Nu ja, in dèze richting had ik dan waarschijnlijk meer aanleg. Maar zou het verstand van dèze meisjes nu zo volkomen anders gebouwd zijn?" Ik kon me dat niet voorstellen. Al lesgevende, rustig trachtend mij in te stellen op de meisjes, drong het tot me door: juist door dìt werk kan je de meisjes op Middelbaar Onderwijs niveau brengen.

De heer Krooshof sprak er over de Wiskunde te behandelen als spel. Maar voor de Wiskundige is dit vak toch ook van belang als *denk*spel! Ook als zodanig, als denkspel, kan dit met meisjes bedreven worden. De exacte redenering, juist in de Meetkundeles, zelfs in de 1e klasse, mits gegeven in kinderlijke taal, je volledig instellend op haar gedachtengang, op haar tempo, ìs mogelijk, ook in een meisjesklasse. Ik denk aan het geval, dat in één van de vorige referaten naar voren kwam: $A = B$, $C = B$, dus $A = C$. Je komt in de Meetkunde dit als moeilijkheid tegen. Maar men kan dan even overgaan op gewone dingen uit het dagelijks leven: „Alice heeft evenveel bonbons als Nel, Annie heeft evenveel bonbons als Nel; wat weet je van de bonbons van Alice en Annie? . . . Begrepen? . . . Hoe is het dan met A, B en C?"

Zo werd me vroeger eens gevraagd, toen ik het woord „conclusie" gebruikte (1e klasse): „Wat is dat, een conclusie?" Er over gepraat. Een voorbeeld uit het gewone leven gegeven. Bedenk jullie nu ook eens zo'n voorbeeld. Toen kwam er: „Gisteren lagen er nog

eitjes in het vogelnestje. Vandaag liggen ze er niet meer in. Conclusie: de jongens hebben het nestje uitgehaald." Met direct de kritiek van een andere leerlinge, dat er ook nog wel andere mogelijkheden waren.

Men kàn op de M.M.S. exacte redeneringen geven, mits men niet die uiterste exactheid vraagt, die men ook van een B-leerling niet kan eisen. Maar men moet zich instellen op de meisjes. En zich weer rekenschap geven van alle gedachtensprongen, die wìj reeds lang automatisch maken. We moeten ons weer bewust worden van ons eigen denken. En luisterend naar de vragen, die in de klas naar voren komen, een wat te grote gedachtensprong van onszelf verdelen in kleinere stapjes. Men kan dan zeker bereiken, dat de leerstof begrepen wordt. En ook, dat bij de behandeling van een eenvoudig vraagstuk, er meer dan één oplossing naar voren komt.

Wat het emotionele betreft en het intuïtieve. Het is toch juist voor deze meisjes van belang, dat niet alles in het emotionele en het intuïtieve gezocht wordt. Het is juist voor haar van belang, dat ze geordend leren denken, logisch, critisch, verantwoord.

Maar we moeten zelf het vertrouwen hebben, dat ze dit kunnen. De meisjes zijn vaak opgevoed, van jongs af aan, in het idee: „dat kan een meisje niet", of: „ze behoeft dat niet te kunnen", of nog erger: „het staat eigenlijk niet zo aardig voor een meisje om hier belangstelling voor te hebben." En ook veel leraren denken: „ze kunnen het niet."

Tegenover deze suggestie moeten wij ons vertrouwen stellen, en ons geduld om, ons instellend op de meisjes, haar toch te leren exact te denken.

A. Kalkman:

Laat ik beginnen met te zeggen, dat ik het in hoofdzaak eens ben met de geachte referent en zelfs in zijn critiek op mijn boekje ver met hem mee kan gaan. Men vergete niet, dat het al weer enige jaren gelden is, dat het werd geschreven.

Tegenover het feit, dat de referent slechts les geeft aan een MMS met HBSonderbouw moet ik stellen, dat ik werkzaam ben op een op zichzelfstaande MMS (26 uur) met 2 uur per week in elk van de laagste 3 klassen, wat een groot verschil geeft. De heer Krooshof meent, dat ik geen bewijzen geef. Jawel, voor de klas wel, in het boekje staan ze niet, iedere leraar geeft zijn eigen bewijs en probeert, hoever hij in een bepaalde klas gaan kan. Overigens hebben ze minder zin dan we denken, getuige de enquête, die de heer Kr.

zelf hield. Vindt U het dan zo erg, dat ik mijn leerlingen aannemelijk maak en niet streng bewijs, dat de inhoud van een piramide grondvlak $\times$ $^1/_3$ hoogte is? Strenge bewijzen levert trouwens niemand overal, ook in de 1e klas van de HBS niet. En waarom zouden we zo nu en dan de wiskunde niet als hulpwetenschap mogen zien? De MTS en zelfs de TH in Delft doen niet anders.

Wat het routinewerk betreft blijf ik van mening, dat heel veel herhaling noodzakelijk is, juist voor deze meisjes. Eiste niet Uw eigen natuurkunde-collega vaardigheid? Het rekenen met graden, minuten en seconden moet natuurlijk beperkt blijven, maar vindt U het niet aardig om ze zelf te laten vinden, dat 1 sec op de aardomtrek ruim 30 m is?

Wat de aansluiting op de Kweekschool, waar ik ook les geef, aangaat dit: Wanneer mijn MMSleerlingen bijna 3 jaar 2 uur per week les hebben gehad, worden ze met privaatlessen (niet door mij) in 3 mnd gebracht op het peil van Mulo A. Dat dit kan, komt door de ondergrond, die de routineboekjes hebben gelegd en de leeftijd, die de leerling dan bereikt heeft.

Om het boekje van de heer v. Velthoven te verdedigen: Ze iets over het getal π te vertellen is juist zo aardig. Ze behoeven het niet te onthouden!

Behandeling van logarithmen en kegelsneden acht ik uitgesloten. Tenslotte kan ik me voorstellen, dat de referent niet met mijn boekje overweg kan, maar dat geldt ook voor mij ten aanzien van andere boekjes. De resultaten hangen niet van het boekje af, maar van de man voor de klas.

HET WISKUNDE-ONDERWIJS OP DE U.L.O.-SCHOOL

door

Dr L. van Gelder

Het is niet mogelijk het probleem van het Wiskunde-onderwijs op de U.L.O.school te bespreken, zonder de organisatie van de U.L.O.school en daarmede de positie van dit schooltype in ons huidige onderwijsstelsel aan te duiden. De didactiek van elk vak wordt mede bepaald door de doelstelling van dat vak en daardoor ook door de doelstelling van de gehele tak van onderwijs. Dit brengt steeds met zich mede, dat bij de opbouw van de didactiek de bepaling van de doelstelling van het onderwijs voorop moet staan.

Nu is het niet onbekend, dat ten aanzien van de doelstelling van de verschillende schooltypen binnen ons onderwijssysteem veelal de klacht geuit wordt, dat deze doelstellingen of niet of veel te vaag omschreven zijn. Zeer scherp wordt deze klacht geformuleerd door Prof. Kohnstamm in zijn Rapport over het N.O. voor Meisjes. Het is één van zijn vele verdiensten voor de paedagogische theorie en de praktijk van het onderwijs, dat hij en zijn medewerksters er in geslaagd zijn een hanteerbare doelstelling voor deze tak van onderwijs te formuleren. Ten aanzien van het M.O. en V.H.O. heeft Prof. Rutten in zijn bekende nota een poging gewaagd voor die schooltypen de doelstelling nauwkeuriger te omschrijven. Het is duidelijk, dat hierbij het probleem lag in de toekomstige bestemming van de leerlingen. Zijn taak was daarom het verzoenen van de innerlijke tegenstrijdigheid, welke ligt in de oude doelstelling van de H.B.S., als opleiding voor verschillende maatschappelijke functies, en de nieuwe praktijk, waarbij de H.B.S. ook een belangrijk contingent van studerenden oplevert.

Overeenkomstige moeilijkheden treden ook op, wanneer we ons gaan bezighouden met de positie van de U.L.O.school en daardoor met de doelstelling van dit schooltype.

Het is echter in het geheel niet aanlokkelijk zich op dit pad te begeven, want op de achtergrond van elke discussie over dit schooltype ligt niet minder dan de strijd om het bestaansrecht. Onbekend-

heid met de huidige onderwijspraktijk op de U.L.O.-school, gerechtvaardigde critiek op de didactiek, miskenning van de sociale waarde van de school, overwaardering van de diploma's, naakte angst om het bestaan, zijn enkele van de bronnen, waaruit een emotioneel geladen complex van strijdvragen ontstaan is, die voor- en tegenstanders, sympathiserenden en verguisers op elkaar afvuren. We zullen dus, willen we niet verdwalen in het doolhof der tegenstrijdigheden, ons zoveel mogelijk bij feiten houden, maar ook dit is geen waarborg tegen het subjectivisme. Elke interpretatie geeft immers de mogelijkheid tot ontsporing.

De taak van de U.L.O.school in ons Nederlandse onderwijssysteem wordt meestal aangeduid in termen ontleend aan de sociale sfeer. Men denkt dan aan de vele bezitters van U.L.O. A- en B-diploma's, die in het maatschappelijke leven een nuttige en soms eervolle plaats bekleden. Voor een deel zijn deze gegevens in de statistieken terug te vinden, maar men bedenke wel, dat deze statistieken wel de voorlopige, d.i. de direct aansluitende bestemming van de gediplomeerden geven, maar geen uitsluitsel geven over de verdere maatschappelijke loopbaan. En juist deze onbekenden spelen een rol in de discussie omtrent de taak van de U.L.O.school. Maar de sociale taak van de school mag niet alleen afgemeten worden naar de geslaagden. Welke betekenis heeft U.L.O.school gehad voor de 55 % van 150.000, die na 1, 2 of 3 jaren de school verlaten hebben?

Naast de sociale taak van de school zien we een culturele taak. Elke opvoeding, dus ook de schoolopvoeding, bestaat voor een belangrijk deel uit cultuuroverdracht. Door het onderwijs krijgt het kind de mogelijkheden deel te nemen aan het cultuurbezit van het volk en wordt daardoor mede deelgenoot van een geestelijke gemeenschap, zowel in historische als in contemporaine betekenis.

Men bedenke echter, dat in onze tijd „cultuur" een zaak is die verdedigd moet worden. De aanvallen komen van alle kanten: de maatschappelijke noodzaak dwingt tot afgestemde, beperkte programma's, een langdurige intellectualistische traditie heeft een overwaardering gewekt voor feitenkennis, de nivellering van ons bestaan met waardeloze films, radio en schetterende jazzmuziek heeft de weerstand tegen geestelijke inspanning vergroot.

De tegenstelling tussen de culturele taak van het onderwijs en de sociale taak, uitgedrukt in het voldoen aan de maatschappelijke eisen, vormt een van de oorzaken van de conflictsituatie, waarin de opvoeder van deze leerlingen gevangen zit. Enerzijds staat de noodzakelijkheid vast te houden aan de leerstofnormen, die voor een

maatschappelijke aansluiting noodzakelijk zijn, anderzijds staat de wenselijkheid de actieve deelname aan het culturele leven in de school voor te bereiden.

Aan deze beide traditionele taken heeft de school reeds haar handen vol. Maar de ontwikkeling van ons paedagogisch denken heeft ons een derde verantwoordelijkheid opgelegd. De zorg voor de individuele, geestelijke en psychische ontwikkeling kan men in de eerste plaats zien als een taak van de gezinsopvoeding, maar waar men ook de grens wil leggen, toch heeft ook de school deel aan deze taak. In elk geval maken we op het ogenblik de situatie mede, dat de schoolopvoeders deze zorg voor de individuele ontwikkeling mede in hun doelstelling willen betrekken. Zo staan we dus voor de taak drieërlei verantwoordelijkheid voor het schoolkind op ons te nemen: voor zijn maatschappelijke bestemming, voor zijn cultureel deelgenootschap en voor zijn individuele geestelijke ontplooiing. Tegen de achtergrond van deze algemene principes moeten we onze didactiek plaatsen.

In deze situatie is ook de U.L.O.onderwijzer gedwongen zich rekenschap te geven van de verhouding tussen de doelstelling van het onderwijs en de middelen, die gebruikt worden om dit doel te bereiken.

Sinds kort na 1945 zien we uit de rijen der U.L.O.onderwijzers zelf de vragen omhoog komen. Vragen, die gegroeid zijn uit een gevoel van onvoldaanheid en ontevredenheid over de discongruentie tussen de paedagogische doelstelling en een verstarde praktijk.

Enkele centrale problemen moeten hier genoemd worden:

1. Op welke wijze kan de leerstof zo gedifferentieerd worden, dat, met behoud van het bereikte niveau, elke leerling in een voor hem passende richting een maatschappelijk aanvaardbaar resultaat kan verwerven? Dit heeft aanleiding gegeven tot een sterkere differentiatie in het examen, waarbij naast het A- en B-diploma ook een C-diploma voorgesteld is, dat de handelswetenschappen op de voorgrond stelt.
2. Direct hierbij aansluitend volgt het probleem van de determinatie. Over welke middelen moet de onderwijzer beschikken om de leerlingen op het juiste tijdstip en met de minste kans op grondige vergissingen een advies te geven over de te volgen richtingen binnen dit onderwijs en op welke criteria moet het advies berusten, dat ongeschikte leerlingen verwijst naar andere schooltypen?
3. Doch niet alleen de determinatie tijdens de schoolloopbaan is een probleem, ook de toelating tot de school is een punt van grote zorg.

Het probleem van de selectie, waar Dr. Prins uitvoerig over gerefereerd heeft, is voor de U.L.O.school zeker even klemmend als voor het M.O. Want hiermede wordt beslist over de belangrijke vraag of de U.L.O.school een school voor alle kinderen zal zijn, alle kinderen, die met goed gevolg de 6e klas van de Lagere School hebben doorlopen of slechts voor hen, die werkelijk in staat zijn gedurende vier jaren een vorm van voortgezet onderwijs te volgen. In het eerste geval, zal èn de leerstof èn de onderwijsmethode aangepast moeten worden aan een intellectueel niveau, dat slechts weinig boven dat van het N.O. ligt. Maar dat betekent ook, dat de huidige differentiatie belangrijk zal moeten worden uitgebreid. Kiest men bewust de tweede mogelijkheid, dan zal men over moeten gaan tot het invoeren van een strikt werkend selectiemiddel, waarbij ik in het midden laat of dit door middel van een schoolverklaring, een testonderzoek of een proefklas moet geschieden.

De huidige toestand, waarbij men bijna uitsluitend afhankelijk is van de schoolverklaring van de Lagere School, brengt een spanning in de school, die de onderwijzer dwingt zijn paedagogisch geweten aan de kapstok te hangen en voort te jakkeren met ongeschikte leerlingen in de hoop de geschikte leerlingen tijdig tot de eindstreep te brengen.

4. Met deze opmerking zijn we in een nieuwe conflictsituatie geraakt. De sociale, culturele en individuele vorming vereisen nu eenmaal andere onderwijsmethoden, dan die, welke gebruikt moeten worden, wanneer men met een heterogeen gezelschap uniforme resultaten wil bereiken. Noch selectie, noch determinatie is mogelijk zonder een onderwijsvorm, waarin de geestelijke activiteit van het kind gestimuleerd wordt. Het logisch gevolg van de nieuwe paedagogische verantwoordelijkheid is het verlangen om in het onderwijs de zelfwerkzaamheid te bevorderen door het invoeren van groepsonderwijs, het projectonderwijs, het arbeidsonderwijs en het leerlingengesprek.

   Meer dan een verlangen kan dit niet zijn, want de tijd ontbreekt om de leerlingen rustig te laten werken. Maar ook zijn de klassen te dicht bevolkt om tot een andere vorm over te gaan.

Het is deze, slechts summier aangeduide, problematiek, die als achtergrond genoemd moet worden, wanneer we de didactiek in een enkel leervak op de U.L.O.school nader willen belichten.

Waar zó zeer de wil tot paedagogisch verantwoorde arbeid gebleken is, waar evenzeer duidelijk blijkt, dat zovele sociale, materiële en geestelijke belemmeringen te overwinnen zijn, zal iedere didac-

ticus de grootst mogelijke voorzichtigheid moeten betrachten, wanneer hij vanuit de didactische theorie met geneesmiddelen komt aandragen, die de patient misschien wel beter kunnen maken, doch die in de huidige praktijk niet toepasbaar zijn.

Formuleren we thans de eisen, die we aan het wiskunde-onderwijs op de U.L.O.scholen moeten stellen en de wegen, die ons in staat stellen tot het geven van goed wiskunde-onderwijs.

Het sociale aspect vereist, dat aan een aantal leerlingen een wiskunde-onderwijs gegeven wordt, dat hen brengt op het niveau van de derde klas van de H.B.S.

Het culturele aspect vereist, dat iedere daarvoor geschikte U.L.O.leerling kennis maakt met de specifieke vormen van de wetenschap, die de mensheid op mathematisch gebied heeft vergaard.

Het individuele aspect vereist, dat de leerstofomvang, de leerstofinhoud en de lesmethode aangepast worden aan de ontwikkelingsmogelijkheden van die leerlingen.

Bij de beoordeling van de leerstofomvang en -inhoud van de U.L.O.wiskunde moeten we uitgaan van de twee programma's, die met A en B aangeduid worden.

Het B-programma, dat de volwaardige wiskundige opleiding voor de U.L.O.school omvat, is historisch gezien, ontleend aan het wiskundige programma van de 3-jarige onderbouw van de H.B.S. In de loop van 4 leerjaren verwerken de B-candidaten de vlakke meetkunde tot en met de cirkel en de algebra tot en met de reeksen, terwijl in de laatste jaren enige aandacht besteed wordt aan eenvoudige grafieken en de inleidende begrippen der goniometrie.

De inhoud van deze leerstof vertoont ten opzichte van de H.B.S.-stof een vrij sterke vereenvoudiging, althans wanneer we de leerboeken vergelijken, maar in verschillende opzichten is een werkelijke vergelijking niet uit te drukken in één woord. Het is niet onbekend, dat vele H.B.S.leraren het leerboek gebruiken als een gesystematiseerd vraagstukkenboek en zelf de theorie verschaffen. En dan zijn zij uiteraard ook vrij om te vereenvoudigen of uit te wijden naar hun inzicht. Voor de U.L.O.onderwijzer ligt dit iets anders. Indien we ons eerst beperken tot de algebra, merken we op, dat de minimum-leerstof weinig variatiemogelijkheden toelaat. Dit hangt samen met de zeer gedetailleerde aanwijzingen van het examen, die de examencommissie (regelingscommissie) voor de scholen beschikbaar stelt. Hieruit vloeit natuurlijk een vicieuze cirkel voort. De examencommissie deelt mede zich binnen bepaalde grenzen te bewegen, waaruit automatisch de verplichting volgt

voor de docent om de leerlingen te wapen met een kennis, die het omschreven gebied volledig bestrijkt. Hier ligt dus de kern van een gehele problematiek, die elke discussie over de didactiek tot een „acte gratuite" dreigt te maken.

Uiteraard geldt dit voor vele examens, maar we hebben gegronde redenen om aan te nemen, dat bij het U.L.O.onderwijs de tegenstelling: geestelijke vorming en beheersbare kennis groter is dan wenselijk geacht mag worden.

Het A-diploma bevat ook een wiskundige opleiding, doch deze is naar inhoud en omvang beperkter dan de B-opleiding. Op het gebied van de algebra omvat de leerstof de hoofdbewerkingen, ontbindingen, wortelvormen en de 1e en 2e graadsvergelijkingen met een onbekende, in de meetkunde sluit men af na de berekening van lijnstukken in driehoek en cirkel, waarbij meer het gebruik van enkele formules, dan de afleiding en de bewijsmethoden op de voorgrond staan.

Uit de leerstofopbouw blijkt niet, dat we van een afzonderlijke U.L.O.didactiek kunnen spreken. We moeten dus nagaan aan welke leerlingen deze leerstof aangeboden wordt. De algemeen aanvaarde eis voor toelating tot de U.L.O.school is een verklaring van het hoofd der Lagere School, dat de leerling de leerstof van de Lagere School met vrucht doorlopen heeft. In een enkel geval tracht men hierop enige controle uit te oefenen, bv. door een klein toelatingsexamen of door het schoolsucces of niet-succes later met het schoolhoofd te bespreken, maar in de overgrote meerderheid der gevallen is de toelating tot de U.L.O. afhankelijk van de genoemde verklaring. Betekent dit nu, dat alle toegelaten leerlingen dezelfde leerstof verwerkt hebben? In genen dele, want elke lagere school heeft een eigen werk-traditie en daarmede een eigen niveau. Maar dit is toch niet het belangrijkste. Waarborgt het goed doorlopen van de Lagere School, dat het kind in staat is vier jaren U.L.O-onderwijs te volgen?

De grote diversiteit in intellectuele mogelijkheden en niveau's dwingen dus tot een zeer voorzichtige introductie van de wiskundige begrippen. Elke wiskunde-docent weet, dat men jonge leerlingen niet lastig moet vallen met abstracties, dat men zich aanpassen moet aan hun taalniveau, dat bewijsmethoden in het eerste jaar niet begrepen worden en dus met voorzichtigheid aangeboden moeten worden. Maar waar moet men de grens stellen om met wiskunde-onderwijs te mogen beginnen? Want waar moet het wiskunde-onderwijs bij aanknopen als blijkt, dat er leerlingen zijn, die niet met eenvoudige breuken kunnen werken, voor wie

de woorden coëfficiënt en exponent meer dan een jaar lang duistere begrippen blijven?

Enig ideë van deze moeilijkheden geven de cijfers uit de publicatie No. 42 van het Nutsseminarium.

De opgave is: Jan eet drie keer per dag.

Hoeveel keer eet hij in een week?

Percentage goede antwoorden:

U.L.O.: 95 %; N.O. v. Meisjes 93 %

Hoeveel keer in Augustus?

U.L.O.: 67 %; N.O. v. Meisjes 65 %

Hoeveel keer in het jaar?

U.L.O. 42 %; N.O. v. Meisjes 54 %

Een andere opgave is:

Een lucifersdoosje is 5 cm lang, 3½ cm breed en 1½ cm hoog. Hoeveel cm is de omtrek van het vlak,waarop de lucifer aangestreken wordt?

Percentage goede antwoorden:

1e kl. U.L.O.: 18 %; Opleidingsschool begin 6e klas 29 %.

Als conclusie van een intensief onderzoek van het aansluitingsprobleem stelt Prof. Kohnstamm aan het M.O. de eis: „na te gaan of er wel een behoorlijk fundament van „ordenend denken" voor wiskunde-onderwijs bij haar leerlingen is gelegd en dit in het negatieve geval aan te brengen, voordat zij met wiskunde-onderwijs begint". Dit geldt nu evenzeer voor de U.L.O.school. Maar welke didactische voorbereiding moet dan niet getroffen worden, als na een half jaar meetkunde-onderwijs het schema $a = b$, $b = c$, met de conclusie $a = c$, onbegrijpelijk blijft? Of wanneer de opgave in

$$a + b = 90$$
$$a + c = 90$$

opgelost wordt door b en c elk 45 te geven.

Natuurlijk moeten we concreet blijven, dus vertalen we de opgave in: Jan en Piet hebben samen een dubbeltje.

Klaas en Piet hebben ook samen een dubbeltje.

Dan wordt voorgesteld, dat Piet 1 cent heeft en door berekening volgt dan het inzicht, dat Jan en Klaas elk 9 cent hebben.

Wanneer na deze bespreking het bewijs van de gelijkheid van overstaande hoeken niet doorzien wordt, treedt wel twijfel op aan de wenselijkheid van dit meetkunde-onderwijs.

Deze ervaringen leiden tot de volgende didactische vragen: Is het wel juist om de algebra te introduceren bij kinderen, die nog

niet allen in staat zijn behoorlijk vaardig te werken met kleine getallen en breuken?

Mag men het meetkunde-onderwijs in de gebruikelijke vorm aanbieden aan leerlingen, die niet in staat blijken eenvoudige logische gedachtenreeksen te volgen?

In deze gedachtengang lijkt het wel wenselijk een periode van voorbereidend wiskunde-onderwijs in te lassen, dat zal dienen om de kloof tussen het actuele denkniveau van het kind en het minimale abstractie-niveau voor het inleidende wiskunde-onderwijs te overbruggen. Een overbrugging, die zowel zal moeten dienen om de aanwezige hiaten in vaardigheid aan te vullen, als de hulpmiddelen voor een passende vorming van het denken te bieden.

We hebben zo juist de nadruk gelegd op de aansluitingsmoeilijkheden van leerlingen, die, hetzij door aanleg, hetzij door vorming, niet direct in staat waren het onderwijs te volgen.

Maar we moeten ook letten op de leerlingen, die reeds in de eerste klas blijk geven een verdere studie, ook na afloop van de U.L.O.school, te kunnen volgen. Men kan niet zeggen: een U.L.O.-leerling is een leerling, die gèèn middelbaar onderwijs kan volgen. In tal van kleinere plaatsen, waar geen middelbaar onderwijs is, of daar waar de traditie de weg naar het M.O. nog niet ingeslagen heeft, is de normale trek naar het verdere onderwijs gericht op de U.L.O.school. Zo vormen de U.L.O.leerlingen in intellectueel opzicht een zeer heterogeen gezelschap, waardoor in elke aanvangsklas de uitersten vrijwel altijd vertegenwoordigd zijn: nl. de leerlingen, die vrijwel hetzelfde wiskunde-onderwijs kunnen ontvangen, dat het M.O. geeft en de leerlingen, die in geen enkel opzicht in staat zijn enig wiskunde-onderwijs te volgen. Welke, onoverkomelijke, eisen dit stelt aan de didactiek, kunt U zich zonder veel moeite voorstellen.

Uiteraard heeft de didactiek voor de U.L.O.school zich aan deze toestand aangepast. Daar waar de leerstof niet meer te vereenvoudigen was, werden de moeilijkheden in tweeërlei opzicht ondervangen. In de eerste leerjaren van het algebra-onderwijs worden de moeilijkheden in de leerstof in zeer kleine onderdelen gesplitst, waarbij veel aandacht aan het inoefenen gegeven wordt. Moeilijkere vormen, die meer aandacht of abstractie vereisen worden in deze jaren overgeslagen en zijn geplaatst in een slotdeeltje, dat speciaal de leerstof voor B-candidaten geeft. Ook bij het meetkunde-onderwijs volgt men algemeen deze procedure, waarbij ook de nadruk ligt op het vaardig hanteren van de elementaire begrippen, de eenvoudigste bewijsmethoden en de correcte weergave van de bewijzen.

Deze moeilijkheden in de aanvangsklassen, die soms 42 of 43 leerlingen bevatten, zijn uiteraard niet kenmerkend voor de hogere leerjaren. Hoe onbevredigend de selectiemethode ook is (practisch alleen zittenblijven of verwijdering) het gunstige gevolg is, dat in elk geval in het derde leerjaar leerlingen zitten, die tot enige wiskundige kennis in staat zijn. Doch hier ligt een nieuwe moeilijkheid. De A- en B- leerlingen zijn niet in aparte klassen geplaatst. Een situatie, die op vele scholen tot het examen blijft voortduren. Een enkel cijfer geeft dit reeds aan. In 1952 deden 15.000 leerlingen U.L.O.-examen, waarvan slechts 3000 B-diploma's, verdeeld over 600 scholen geeft dat gemiddeld slechts 5 B-candidaten per school, zodat het vormen van afzonderlijke klassen eerder uitzondering dan regel is. Ziet men de grote verschillen in leerstof en kent men de zeer grote verschillen in wiskundige mogelijkheden van A- en B-candidaten, dan ligt hier duidelijk een onderwijs-organisatorisch en didactisch probleem.

In welke richting zien we nu de ontwikkeling van de didactiek?

Bij deze bespreking van het wiskunde-onderwijs is het noodzakelijk te beschikken over uitgebreide gegevens over de intellectuele mogelijkheden van onze leerlingen. Sedert vele jaren is de studie van de didactiek van de wiskunde ernstig aangepakt. Het aanvankelijk optimisme van Katz in 1913, dat het psychologisch onderzoek in staat zou zijn de kloof tussen het kinderlijk denken en het specifiek mathematische denken te overbruggen is tot op heden niet gerechtvaardigd gebleken. De oorspronkelijk sterke tegenstellingen in de didactische theorie van het M.O. tussen het epistemisch en het psychologisch wiskunde-onderwijs (Dijksterhuis-Ehrenfest) zijn in de loop der laatste jaren zeker verminderd.

Hoewel de strijdvraag niet geheel opgelost is, wijst Mooy er op, dat alle onderzoekers het eens zijn over het feit: *dat op 12-j. leeftijd de belangstelling voor abstracte beschouwingen en de mogelijkheid om deze te volgen bij slechts een zeer gering aantal leerlingen aanwezig is.*

Maar laten we goed bedenken, dat we voor 12-jarige U.L.O-leerlingen over geen enkel experimenteel gegeven beschikken. Daar staat echter tegenover, dat we een schat van ervaringen hebben, die in dit geval een eensluidende taal spreken, nl.:

Het wiskunde-onderwijs voor 12-jarige U.L.O.leerlingen kan niet eenvoudig genoeg zijn.

Maar dit brengt een ernstig gevaar mede, dat men uitsluitend gaat letten op de verkregen vaardigheid in eenvoudige bewerkingen en erger nog, tevreden is met correcte reproducties van overgeschreven oplossingen.

Mede onder invloed van de denkpsychologische onderzoekers wordt het besef levendig, dat deze wiskunde-didactiek, die misschien wel leidt tot goede examen-resultaten, toch niet in overeenstemming is met een der bedoelingen van het wiskunde-onderwijs, nl. de individuele vormende waarde.

Het is wenselijk hier een opmerking in te lassen over het vraagstuk van de vormende waarde van het wiskunde-onderwijs. Zoals we reeds opmerkten, berust de waarde van het wiskunde-onderwijs op de U.L.O.school meer op utiliteitsgronden dan op de vormende waarde van dit vak. Toch vindt men in didactische beschouwingen steeds een verwijzing naar de betekenis van de wiskunde voor het ontwikkelen van het individuele denken en van het formeel logische redeneren. Ik heb vaak de gedachte gehad, dat bij deze beschouwingen twee geheel verschillende problemen een rol spelen, nl. de intelligentiestructuur en het intelligentie-niveau. Op grond van de onderzoekingen van Kohnstamm en Prins blijkt het vast te staan, dat het niveau van de intelligentie geen vaststaande grootheid is. Zij spreken van de meta-stabiliteit van de intelligentie. Deze ontdekking, hoezeer van grote waarde, is minder wonderlijk, wanneer men ziet, dat hierbij aan het begrip intelligentie niet alleen het moment van de aanleg, maar ook van de rijping, de vorming en de belangstelling verbonden is. De intelligentie wordt daarmede een gedragswijze, die paedagogische beïnvloeding wel toelaat, zij het dan binnen bepaalde grenzen. De moeilijkheid voor de practicus blijft dan echter, dat de bovenste grens niet vooruit te bepalen is, ook niet door voorafgaand test-psychologisch onderzoek. Dit verklaart de vele verrassingen, waarvoor we in de school steeds komen te staan. Het „leren denken" uit de denkpsychologische school richt zich op deze niveau-verandering van de intelligentie en wel door het aanbieden van bepaalde oplossingsmethoden, die het kind leert hanteren. Daarbij is gebleken, dat op vrijwel elk niveau een verandering in het intelligente gedrag kan optreden, mits het kind bewust gemaakt wordt welke oplossingsmethoden adequaat toegepast kunnen worden. Dit denkpsychologisch onderzoek heeft in de eerste plaats betrekking op het hanteren van taalschemata, zodat het zeker kan bijdragen tot het ordenend denken. Niveau-doorbraak is dus mogelijk gebleken, maar binnen welke intelligentie-structuur heeft dit plaats gevonden? Zo min het mogelijk is de intelligentie-niveau's zuiver in een schaal naast elkaar te plaatsen, zo is het ook niet mogelijk de intelligentie-structuren volkomen scherp te onderscheiden. Wel geeft het individuele psychologische onderzoek aan, dat er structuur-momenten zijn, die voor de gehele structuur van de intelligentie bepalend zijn.

Twee momenten zijn hier van belang:
a. het moment van het emotionele, doorleefde taalgebruik.
b. het moment van het objectieve, significatieve, logisch en geformaliseerd taalgebruik.

Nu staat m.i. vast, dat naarmate het intelligentie-nivau lager is, de affectieve momenten een grotere invloed hebben bij het tot stand komen van het denkresultaat. Dit blijkt bv. uit een onderzoek bij het Meisjes N.O., waarbij een opgave in de emotionele sfeer belangrijk betere resultaten afwierp, dan in de zakelijke sfeer.

Waar nu in abstracto de vormende waarde van de wiskunde aanwezig kan zijn, een punt waarover de meningen nog verdeeld zijn, kunnen we in elk geval aangeven, wanneer deze zal ontbreken.

Deze vormende waarde ontbreekt:
1. Wanneer de structuur van de intelligentie niet gericht is op het hanteren van het geformaliseerd taalgebruik van de wiskunde.
2. Wanneer het niveau van de intelligentie de assimilatie van de denkvormen van het wiskundig denken niet toelaat.
3. Wanneer de paedagogische verhouding tussen de docent en de leerling niet zodanig is, dat de leerling zich opgenomen weet in- en vertrouwen kan op de toewijding van de docent.
4. Wanneer de methoden van lesgeven gericht zijn op het passief verwerken van de leerstof, zodat de zelfstandige denkverantwoordelijkheid achterwege moet blijven.

Wil het wiskunde-onderwijs op de U.L.O.school vormende waarde hebben, dan komen we niet uit met een abstracte waardebepaling, maar zullen we ons uitgangspunt moeten vinden in het concrete geval:

Wiskunde-onderwijs aangepast aan het niveau van de intelligentie van deze leerling, wiens intellectuele structuur vatbaar voor deze vorming is, zal, mits het onderwijs gegeven wordt in een paedagogische verhouding, die de overdracht mogelijk maakt en met gebruikmaking van methoden, die het zelfständig denken bevorderen, vormende waarde voor dië leerling hebben.

Laten we anderzijds bedenken, dat, wanneer aan deze voorwaarden niet voldaan wordt, het onderwijs in de wiskunde in het gunstigste geval de leerling onberoerd laat, maar in veel meer gevallen aanleiding is tot een misvorming in geestelijk en emotioneel opzicht. Niet te verwerken leerstof kweekt bij de leerling een habitus, die variëren kan van pralerige betweterij tot pseudodomheid.

Passen we dit toe op de bestaande toestand voor het U.L.O. wiskunde-onderwijs, dan blijkt ons:

I. *a*. Dat bij de mathematische richting alle aandacht besteed moet worden aan een didactiek, die het aanleren van het zelfstandige denken moet bevorderen.

b. Dat het niveau van het wiskunde-onderwijs in de mathematische richting gehandhaafd moet worden op het H.B.S.peil en zich slechts daarvan moet onderscheiden door een langzamer tempo en door een passende rangschikking van de leerstof.

II. Dat de huidige leerstof van de niet-mathematische richting geheel herzien moet worden, waarbij afgestapt moet worden van de fictie van de „gedeeltelijke" wiskundige opleiding.

Evenals bij het M.O. is ook bij het U.L.O. onderwijs de vernieuwde didactische aanpak het duidelijkst tot uiting gekomen bij het meetkunde-onderwijs. De noodzakelijkheid van een inleidende meetkunde-cursus wordt overal gevoeld en het stemt tot verheugenis, dat bij de voorlichting aan de U.L.O.onderwijzer ook dit onderwerp op het programma gesteld is. De lijn Ehrenfest, Albada, Hiele, Timmer zet zich dus door en we zien dus moedige pioniers in de school optreden, die de eerste jaren meer waarde hechten aan een goede verkenning van de meetkundige relaties, dan aan correct gememoriseerde stellingen met hun bewijzen. Ik heb daarbij de indruk, dat op het gebied van het meetkunde-onderwijs meer geëxperimenteerd wordt dan de enkele, enigszins gemoderniseerde leerboekjes zouden doen vermoeden. Op het terrein van de algebra ligt dit anders. Daar overheerst het technisch beheersen van eenvoudige leerstof.

In de opbouw van de didactiek van de wiskunde bij het U.L.O.-onderwijs zijn drie fasen te onderscheiden:

1. De voorbereidende periode, waarin de kloof tussen het denk- en kennisniveau van de nieuwe leerlingen en het niveau, dat nodig is om de eenvoudigste wiskundige relaties te kunnen begrijpen, overbrugd wordt. Voor een deel is dit werk een voortzetting van de Lagere School, maar het kan ook een eigen karakter krijgen, wanneer de begrippen: getalrelaties en ruimtelijke relaties centraal gesteld worden.
2. De inleidende periode, die een oriëntering beoogt in de eenvoudigste wiskundige relaties. Hier behoort niet de technische beheersing, maar het werken met eenvoudige begrippen op de voorgrond te staan.
3. De systematische periode, die als grondslag voor een verdere wiskundige scholing dient.

Deze perioden zullen niet voor alle leerlingen even lang kunnen

duren. Ook in de klassikale school zal 't mogelijk zijn voorbereidend materiaal op verschillend niveau aan te bieden. De tweede en de derde periode geven tevens de onderscheiding tussen de niet-mathematische en de mathematische richtingen aan.

Voor de niet-mathematische richting kan het wiskunde-onderwijs niet meer dan inleidend zijn en zal daarom niet het systematische karakter moeten dragen als voor de mathematische richting. Bij de mathematische richting zal het pas mogelijk zijn om technische beheersing van de voornaamste wiskundige bewerkingen en inzicht in de aard van deze bewerkingen te verkrijgen.

Zowel van de zijde der U.L.O.leerkrachten als van andere zijde zal men de vraag stellen, wat er op dit ogenblik dan aan het wiskunde-onderwijs te verbeteren is,

In ons op de praktijk ingesteld betoog is het nodig eerst enige aandacht te schenken aan enkele obstakels in de hervorming van het onderwijs.

1. Het onderscheid tussen mathematische en niet-mathematische richtingen binnen het U.L.O.onderwijs vereist een andere organisatie in de school, bv. een tijdige splitsing in de B- en de A- en C-richting of een sterke individualisatie. Bestaan daar de hulpmiddelen voor? Is het mogelijk het kind op 12- à 13 jarige leeftijd reeds in een richting te sturen?
2. Voor de niet-mathematische richting zal een nieuwe leerstof opgebouwd moeten worden. Wie zullen dat moeten doen? De leerkrachten, die overbelast zijn met hun dagelijkse schooltaak? Ieder, die een didactisch werkje heeft geschreven, weet, dat dit alleen lonend is, als het precies past in het traditionele schema. Veranderingen in de leerstof zullen daarom samen moeten gaan met een verandering van het examen.
3. Het inrichten van een nieuw leerplan brengt langdurige didactische en wiskundige studie met zich mede.

Het M.O. is in zoverre in haar voordeel, dat de wiskundige bekwaamheid van haar docenten vaststaat. Wanneer er nu bij een groot aantal docenten didactische belangstelling is, is dus aan deze voorwaarde reeds voldaan.

Doch in het U.L.O.onderwijs ligt dit anders. De wiskundige opleiding van de L.O.akte of van K. I. is weinig geschikt voor het verkrijgen van een zelfstandig oordeel over de wetenschappelijke wiskundige inhoud van de leerstof. Hoezeer de U.L.O.-onderwijzer ook geschoold is in de dagelijkse onderwijspraktijk, zijn didactische kennis kan hij aan zijn wiskundige opleiding niet ontlenen. Hij zal zich dus afzonderlijk moeten bekwamen. Maar hier treedt de moei-

lijkheid op van het systeem van de vakgroep-docent, waarbij elke docent twee of drie vakken moet beheersen. Dit beperkt uiteraard de mogelijkheid om zich op de hoogte te stellen van de didactiek van elk dier vakken.

4. Behalve het ontbreken van een nieuw leerplan, nieuwe leerstof en de mogelijkheid voor de U.L.O.onderwijzer dit zelfstandig tot stand te brengen, moeten we nog verschillende belemmeringen noemen.

Over de aard van het examen spraken we reeds. Groter bezwaar voor de ontwikkeling van een didactiek leveren echter de grote klassen en de heterogene samenstellingen van deze klassen. Uiteraard dringt hier de gedachte aan een vorm van individueel onderwijs naar voren. Op grond van een lange ervaring meen ik te kunnen zeggen, dat dit individueel onderwijs in de wiskunde aan leerlingen van de U.L.O.school mogelijk is. Maar deze oplossing is binnen de huidige situatie van het U.L.O.onderwijs volstrekt onmogelijk. Trouwens het individualiseren van het onderwijs betekent maar zeer weinig als niet tevens de leerstofinhoud veranderd wordt, zodat, wanneer we in deze richting gaan werken, we toch bij dezelfde problemen terecht komen.

Mag ik enkele punten noemen, die dringend om uitvoerig onderzoek vragen, punten, die de noodzakelijke voorwaarden vormen voor de opbouw van een nieuwe organisatie van de U.L.O.school, waarop daarna een nieuwe didactiek gebouwd kan worden.

1. Het onderzoek naar de sociale achtergrond van de leerlingen.
2. Het onderzoek naar de bestemming van de leerlingen.
3. Het onderzoek naar de intellectuele en culturele mogelijkheden van de leerlingen.
4. Het onderzoek naar de aard van de leerstof, die in overeenstemming is met de aanleg en de bestemming van deze leerlingen.
5. Het onderzoek naar de onderwijsvorm en de wijzen, waarop de leerstof aangeboden dient te worden.
6. Het onderzoek naar de mogelijkheden van een didactische scholing van de leerkrachten.

Ik ben mijn bespreking begonnen met een uiteenzetting van de huidige problematiek rond de U.L.O.school. Nu we in zeer grove trekken de moeilijkheden van het wiskunde-onderwijs aangewezen hebben, komen we tot dezelfde, reeds genoemde, kwesties. Het is dan ook mijn stellige overtuiging, dat het niet mogelijk is de didactiek van het wiskunde-onderwijs in betere banen te leiden, zonder een verbetering van de gehele organisatie van het U.L.O. onderwijs.

Bijna tien jaar lang wordt over de toekomstige organisatie van de U.L.O.school geschreven en gesproken. Tot definitieve oplossingen is men echter niet gekomen, kan men ook niet komen, omdat de middelen ontbreken om ernstig studie te maken van alle facetten van dit probleem.

Het vestigen van de aandacht van allen, die betrokken zijn bij de opbouw van het onderwijs, op de noodzakelijkheid van dit onderzoek, acht ik op dit ogenblik de belangrijkste dienst, die we de U.L.O.school kunnen bewijzen.

INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS 1954

Second communication

The Organizing Committee is pleased to inform you of the following details. The Committee regrets that for technical and administrative reasons this second communication could only be written in one language, although the Committee would have liked to use more languages. For similar reasons the task of the Secretariat would be lightened very much if in your correspondence with the Congress Committee you would use English, French or German.

General

Date and place. The Congress will be held in Amsterdam from Thursday September 2nd to Thursday September 9th (inclusive) and will meet in the building of the Royal Tropical Institute. The opening and closing sessions will be held in the Amsterdam „Concertgebouw".

Secretariat. All correspondance must be directed to *The Secretariat of the International Congress of Mathematicians* 1954, 2*e Boerhaavestraat* 49, *Amsterdam, The Netherlands.*

Membership. As stated in the first communication there will be two categories of members in the Congress: *regular members,* paying D. Gld. 50,— (or, if they do not want to attend the banquet, D. Gld. 40,—) and *associate members,* paying D. Gld. 20,— (or, if they do not want to attend the banquet, D. Gld. 10,—).

Finance. The fees may be paid immediately (and preferably before Febr. 15th, 1954) in the account of the International Congress of Mathematicians 1954 with the „*Amsterdamsche Bank N.V., Filiaal Leiden, The Netherlands*". Those intending to pay by postal transfer, may use the „Postgiro" number of this Bank, Filiaal Leiden, No 9200.

Scientific program

One-hour-addresses: Until now a score of outstanding mathematicians have been invited by the Organizing Committee to deliver one-hour-addresses; most of them have accepeted the in-

vitation. The Organizing Committee is convinced that by these addresses a survey of the recent development in the whole field of mathematics will be furnished.

Sections. As stated in the first communication there will be seven sections.

Half-hour-addresses: Most of the 45 experts who, up to the present, have been invited to deliver half-hour-addresses have accepted the invitation. The distribution over the Sections is intended as follows:

Section	I	Algebra and Theory of Numbers	(8 addresses)
,,	II	Analysis	(13 ,,)
,,	III	Geometry and Topology	(3 ,,)
,,	IV	Probability and Statistics	(4 ,,)
,,	V	Mathematical Physics and Applied Mathematics	(6 ,,)
,,	VI	Logic and Foundations	(3 ,,)
,,	VII	Philosophy, History and Education	(3 ,,)

Short lectures: Short lectures will be given by regular members of the Congress who apply beforehand ot the Organizing Committee. The time allotted for a short lecture is 15 minutes. The Organizing Committee has the intention to give copies of the collected preprints of these lectures to all regular members at the beginning of the Congress. It is therefore essential that the Organizing Committee should be in possession of the abstracts of the papers concerned before February 15th, 1954; Address: *Secretariat of the International Congress* 1954, 2*e Boerhaavestraat* 49, *Amsterdam, The Netherlands.* These abstracts should be made on the blank enclosed herewith; the text will be considered final. The abstract may not exceed 400 words. It is by no means sure that applications which reach the Organizing Committee after February 15th, 1954 can be accepted.

Proceedings. The Proceedings will be printed after the Congress. Each regular member will receive the Proceedings without further payment. Further copies may be available at a reduced price for those who express their wish before March 15th, 1954. As till now no estimate could be made as to the size of the Proceedings, the price could not be fixed yet.

Entertainments and excursions

The Organizing Committee has planned several entertainments including official and informal receptions and parties, a concert by the „Concertgebouworkest Amsterdam" and a banquet. At these

features no special dress is required. Moreover a number of excursions have been planned which may give an impression of the landscape and the culture in the Netherlands. A special ladies-program had been compiled. In view of the preparation of some of these recreations the Organizing Committee invites you to complete the enclosed form, in order to know your preference concerning:

A. *A number of excursions by bus on Tuesday-afternoon, Sept. 7th,* 1954:

A 1 Amsterdam—Velsen (Blast-furnaces and Steel Works)—IJmuiden (Northsea-sluices) (4 hours).
A 2 Amsterdam—Amsterdamse Bos (park of 1000 ha.)—Schiphol Airport—Cruquius (hydraulic model of the Dutch polders)—Haarlem—Amsterdam (4 hours).
A 3 Amsterdam—Volendam—the Island of Marken (characteristic houses and costumes)—Amsterdam (4 hours).
A 4 Amsterdam—The Hague (Museums, Peace-Palace)—Scheveningen (beach)—Amsterdam (5 hours).
A 5 A trip through Dutch polders to the artificial dike between Holland and Friesland, intended for those who are interested in the specific hydraulic problems of Holland (6 hours).
A 6 Amsterdam—Delft (historical town, cathedral)—The Hague—Amsterdam (6 hours).
A 7 Amsterdam—Rotterdam—Amsterdam (6 hours).
A 8 A trip through the polders to the old Zuiderzee-ports Hoorn, Enkhuizen (6 hours).

B. *A number of evening-entertainments which are planned for Monday-evening, September 6th,* 1954:

B 1 Chamber music by a Dutch string quartet.
B 2 Chansons-evening.
B 3 Show of historical costumes.
B 4 Simultaneous chess-game by Dr M. Euwe (mathematician and former worldchampion).
B 5 A programme of Dutch cultural films.

C. *A number of morning-excursions which are planned for September 3rd, 6th and 8th and which are intended for the associate members.*

EEN ONDERZOEK NAAR DE OVERLADING VAN HET PROGRAMMA VOOR DE WISKUNDE BIJ HET VOORBEREIDEND HOGER EN MIDDELBAAR ONDERWIJS IV

door

DR L. N. H. BUNT

SECTIE H.B.S. ALGEBRA D †)

Onderwerp: kwadratische functies, grafiek hiervan; tekenverloop; ontbinding; uiterste waarden; raaklijn aan parabool; kwadratische ongelijkheden.

A. Behandelde begrippen.

	H.B.S. 1	H.B.S. 2	H.B.S. 3	Gymnasium 1	Gymnasium 2
1. As van symmetrie	×		×	×	×
2. Parabool	×		×	×	×
3. Dalparabool	×		×		
4. Bergparabool	×		×		
5. Definiet positief	×	×	×		
6. Definiet negatief	×	×	×		
7. Top van een parabool	×	×	×	×	
8. Toestand van een functie	×	×	×		
9. Kwadratische ongelijkheidsopgave	×	×	×		×
10. Extreme waarde van een functie		×	×	×	×
11. Maximum van een functie		×	×	×	×
12. Minimum van een functie		×	×	×	×
13. Nulpunt van een functie	×			×	
14. Discriminant	×	×	×		

†) In de lijsten A, B, C en D zijn ook de gegevens voor de sectie Gymnasium Algebra D opgenomen.

B. Behandelde eigenschappen en methoden.

	H.B.S. 1	H.B.S. 2	H.B.S. 3	Gymnasium 1	Gymnasium 2 §)
1. De grafieken van de functies $y = ax^2$ (parabolen genaamd) raken de x-as in de oorsprong. De y-as is een as van symmetrie	×		×		
2. De grafieken van de functies $y = ax^2 + bx + c$ zijn parabolen (uitsluitend toegelicht aan de hand van voorbeelden)	×		×	Δ)	
3. De grafiek van de functie $ax^2 + bx + c$ is voor $a > 0$ een dalparabool en voor $a < 0$ een bergparabool	×		×		
4. De functie $ax^2 + bx + c$ is te schrijven in de vorm $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$	×		×		
5. De grafiek van de functie $ax^2 + bx + c$ heeft als top het punt met abscis $-\frac{b}{2a}$ en ordinaat $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$				×	

	H.B.S. 1	H.B.S. 2	H.B.S. 3	Gymnasium 1	Gymnasium 2
6. Voor $D = b^2 - 4ac > 0$ is $ax^2 + bx + c$ te ontbinden in twee factoren van de eerste graad in x: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, waarbij x_1 en x_2 de nulpunten zijn van de functie	×	×		×	
7. Voor $D = 0$ is $ax^2 + bx + c$ het kwadraat of het tegengestelde van het kwadraat van een lineaire vorm in x: $ax^2 + bx + c = \pm [\sqrt{\lvert a \rvert}(x - x_1)]^2$	×	×		×	
8. Voor $D < 0$ is $ax^2 + bx + c$ niet ontbindbaar	×	×		×	
9. Als D een zuiver kwadraat is, is de functie $ax^2 + bx + c$, waarin de coëfficienten rationaal ondersteld zijn, in rationale factoren te ontbinden ††) . . .	×	×			
10. Voor $D < 0$ heeft $ax^2 + bx + c$ voor elke x hetzelfde teken als a	×	×	×	×	
11. Voor $D = 0$ is $ax^2 + bx + c$ positief of nul voor $a > 0$ en negatief of nul voor $a < 0$	×	×	×	×	
12. Voor $D > 0$ heeft $ax^2 + bx + c$ voor $x_1 < x < x_2$ het tegengestelde, voor $x < x_1$ en $x > x_2$ hetzelfde teken als a	×	×	×	×	
13. De parabool $y = ax^2 + bx + c$ en de rechte $y = px + q$ snijden elkaar als de discriminant van $ax^2 + bx + c = px + q > 0$ is. Zij raken elkaar als $D = 0$ is. De rechte ligt geheel buiten de parabool als $D < 0$ is	×	×			
14. De functie $ax^2 + bx + c$ bereikt voor $x = -\frac{b}{2a}$ een extreme waarde, die gelijk is aan $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Voor $a > 0$ is dit extreem een minimum, voor $a < 0$ een maximum		×	×	×	

§) Uit de ingezonden gegevens is niet op te maken welke onderwerpen behandeld zijn.

Δ) In de vorm van een definitie.

††) Met de uitdrukking „rationale factoren" wordt in de schoolboeken bedoeld, dat de nulwaarden rationaal zijn.

C. Behandelde vraagstukkentypen. †)

	H.B.S.			Gymnasium	
	1	2	3	1	2
1. Het tekenen van de grafiek van een gegeven kwadratische functie	×		×	×	×
2. De nulpunten van een kwadratische functie bepalen	×	×	×	×	×
3. Van een parabool met gegeven vergelijking de snijpunten met de assen bepalen	×		×	×	
4. Een kwadratische functie in de gedaante $y = a(x - p)^2 + q$ brengen	×		×		
5. Van een parabool met gegeven vergelijking de coördinaten van de top bepalen	×		×	×	×
6. De vergelijking opstellen van een parabool, gaande door drie punten met gegeven coördinaten	×		×		×
7. De vergelijking opstellen van een parabool, als de coördinaten van de top en van een ander punt gegeven zijn . . .	×				×
8. De vergelijking opstellen van een parabool met een in vergelijking gegeven as van symmetrie en gaande door twee punten met gegeven coördinaten . . .					×
9. Parameters in de coëfficienten van de vergelijking van een parabool zodanig bepalen, dat deze door punten met gegeven coördinaten gaat.			×		
10. Door berekening de coördinaten bepalen van de snijpunten van een parabool en een rechte met gegeven vergelijkingen	×				×
11. Door berekening de coördinaten bepalen van de snijpunten van twee parabolen met gegeven vergelijkingen	×				
12. Een kwadratische functie in lineaire factoren ontbinden	×	×		×	
13. Een kwadratische functie van meer dan één veranderlijke in lineaire factoren ontbinden		×		×	
14. Een parameter in de coëfficienten van een kwadratische functie zodanig bepalen, dat deze in rationale factoren kan worden ontbonden.				×	
15. Een parameter in de coëfficienten van een kwadratische functie van twee veranderlijken zodanig bepalen, dat deze in rationale factoren kan worden ontbonden	×	×			
16. Een parameter in de coëfficienten van een kwadratische functie zodanig bepalen, dat deze een volkomen kwadraat is. .	×	×		×	

	H.B.S. 1	H.B.S. 2	H.B.S. 3	Gymnasium 1	Gymnasium 2
17. Het tekenverloop van een kwadratische functie aangeven	×	×		×	×
18. Een parameter in de coëfficienten van een kwadratische functie zodanig bepalen, dat deze functie definitief positief of definiet negatief wordt.	×	×	×	×	
19. Toepassing van B 3	×		×		
20. Het oplossen van een kwadratische ongelijkheidsopgave	×	×	×		
21. Het oplossen van een ongelijkheidsopgave van het type $\frac{ax+b}{cx+d} \lessgtr e$	×			×	
22. Het oplossen van een ongelijkheidsopgave van het type $\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r} \lessgtr d$	×		×		×
23. De uiterste waarde van een kwadratische functie bepalen				×	×
24. De argumentwaarde van de uiterste waarde van een kwadratische functie bepalen					×
25. Een parameter in de coëfficienten van een kwadratische functie zodanig bepalen, dat het extreem een gegeven waarde aanneemt		×			×
26. Een parameter in de coëfficienten van een kwadratische functie zodanig bepalen, dat het extreem voor een gegeven waarde van het argument wordt bereikt		×			
27. De vergelijking bepalen van een raaklijn aan een gegeven parabool, evenwijdig met een gegeven rechte	×	×			
28. De vergelijking bepalen van een parabool, die raakt aan een gegeven rechte en aan zekere andere voorwaarden voldoet . .	×	×			

†) Waar in deze lijst van „parabool" sprake is, wordt een parabool bedoeld met de as van symmetrie evenwijdig aan de y-as. Met „kwadratische functie" wordt een functie van één veranderlijke bedoeld, tenzij anders is aangegeven.

D. Benodigde vroegere leerstof.

	H.B.S.			Gymnasium	
	1	2	3	1	2
1. Het oplossen van lineaire ongelijkheidsopgaven	×	×	×	×	×
2. Het tekenen van grafieken	×		×	×	×
*3. Het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen	×		×		×
4. Het oplossen van een vierkantsvergelijking	×	×	×	×	×
5. Het teken van de discriminant als criterium voor de oplosbaarheid van een vierkantsvergelijking	×	×	×	×	

* Speelt uitsluitend een rol bij één of meer van de gemaakte vraagstukken.

1. *Docent.*
   H.A.D. 1.
2. *Gebruikt boek.*
   Wansink: Reken- en Stelkunde II, 2e druk.
3. *Behandelde leerstof.*
   §§ 99, 101, 103, 111, 113.
4. *Gemaakte vraagstukken.*
   § 100;
   § 104 : 6, 12, 14, 15;
   § 114 : 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14;
   § 117 : 2, 4 t/m 8;
   § 119 : 2, 5 t/m 8;
   11e herhaling V.
5. *Extra overzichten, uitbreidingen, dictaat, enz.*
   Geen.
6. *Herhalingen van vroegere leerstof.*
   Het oplossen van ongelijkheidsopgaven van het type:
   $\frac{(2-x)(x+1)}{(x-5)(x+3)} \geqq 0.$
   Zie ook lijst D, blz. 72.
7. *Tijd, besteed aan leerstof en vraagstukken met inbegrip van de proefwerken.*
   21 lesuren.
8. *Tijd, besteed aan huiswerk.*
   16 uur.
9. *Behandelde begrippen.*
   Zie lijst A, blz. 68.
10. *Behandelde eigenschappen.*
    Zie lijst B, blz. 68 e.v.
11. *Behandelde vraagstukkentypen.*
    Zie lijst C, blz. 70 e.v.
12. *Moeilijke of om andere redenen tijdrovende gedeelten of vraagstukken.*
    Zie de analyse van de moeilijkheden bij enkele proefwerken.

13. *Proefwerken.*

Proefwerk I (opgegeven na 7 lesuren).

1. Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van de functie: $y = 2x^2 - 12x + 16$.
2. Voor welke waarden van x is $y = -2x^2 + 4x + 6$ negatief?
3. Bereken de coördinaten van de snijpunten van: $y = x^2 - 4x + 7$ en $y = x + 3$. Tekenen!
4. Bepaal de kwadratische functie, waarvan de grafiek door $(-1, +2)$, $(0, +4)$ en $(+1, +3)$ gaat.
5. Bepaal de kwadratische functie, waarvan de grafiek de x-as snijdt in de punten met $x_1 = -1$ en $x_2 = +4$, en de y-as in het punt met $y = +1$.

Proefwerk II (opgegeven na 14 lesuren).

1. Los op: $\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+4)(5-x)} \leqq 0.$

2. *a*) Voor welke waarden van a is de grafiek van

$$y = (a^2 - 9)x^2 - 8x + 1$$

een bergparabool?

b) En voor welke een dalparabool?

3. Gegeven: $(a + 3)x^2 - 8x + (a - 3) = 0$

Gevraagd:

a. Voor welke waarden van a zijn er twee wortels?
b. Voor welke waarden van a is er één wortel?
c. Voor welke waarden van a zijn er nul wortels?

4. *a*) Voor welke waarden van a is de functie

$$y = (a^2 - 9)x^2 - 8x + 1$$

definiet positief?

b) Voor welke definiet negatief?

5. Gevraagd:
de kwadratische functie, waarvan de grafiek door $(+4, -8)$ gaat en $(+1, +2)$ tot top heeft.

Proefwerk III (opgegeven na 22 lesuren).

1. $$y = a(a - 2)x^2 + (a - 2)x - 1$$

a) Voor welke waarden van a stelt deze vgl. een rechte lijn voor?

b) En voor welke waarden een dalparabool?
c) Bereken de maximale waarde van y, als $a = 3$.
d) Bereken de maximale waarde van y, als $a = 1$.
e) Voor welke waarden van a is y definiet positief?

2. $$(2a - 5)x^2 - 2(2a - 3)x + a - 3 = 0.$$
a) Voor welke waarden van a zijn er 2, 1, 0 wortels?
b) Voor welke waarden van a is de ene wortel positief en de andere negatief?
c) Voor welke waarden van a is $x_1 + x_2 > 1$?

3. *a*) Voor welke waarden van a raakt de grafiek van $y = ax + 1$ aan die van $y = x^2 - 4x + a$?
b) En voor welke waarden van a is er snijding?

Proefwerk IV (opgegeven na 24 lesuren).

1. *a*) Teken t.o.v. één assenstelsel de grafieken van $y = -x^2 + 10x - 16$ en van $y = 2x - 4$.
Bereken de coördinaten van de snijpunten A en B.
b) Op AB ligt tussen A en B een punt C; een rechte door C, evenwijdig met de y-as, snijdt de parabool in D.
Bereken de maximale lengte van CD.

2. *a*) Voor welke waarde van P heeft de vgl.
$$x^2 - (10 + 2p)x + 2p^2 + 10p = 0$$
twee wortels?
b) Bewijs, dat er voor geen enkele waarde van p twee negatieve wortels zijn.

Proefwerk V (opgegeven na 25 lesuren).

1. Wat is het maximum of minimum van de functie $y = -x^2 + 6x - 5$?

2. Wat zijn de coördinaten van de top van de grafiek van de functie $y = 2x^2 - 8x + 1$?

3. Los op: $$\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 25} \geqq 0.$$

4. $(a + 3)x^2 + ax + 1 = 0$
Voor welke waarden van a heeft deze vgl.:
a) twee wortels,
b) één wortel,
c) nul wortels?

5. Voor welke waarden van a is de functie
$$y = (a + 4)x^2 - 2(a + 1)x + 1$$
definiet positief?

6. Als voor een getallenrij geldt: $S_n = n^3$, bewijs dan, dat $t_n = 3n^2 - 3n + 1$, en bereken de $n$de term T_n van de nieuwe reeks, als: $T_1 = t_2 - t_1$
$T_2 = t_3 - t_2$
$T_3 = t_4 - t_3, \ldots$ enz.

7. Bereken t_n, als $S_n = 3(1 - 3^{-n})$.

8. Herleid: ${}^{8}\log \sqrt[5]{\tfrac{1}{4}} + 2^{{}^{4}\log 25}$.

9. Bereken x en y uit: $\log x = 2 - 3 \log 2$
$\log \log y = 3 \log 2 + \log \log 3$.

14. *Resultaten van de proefwerken en vergelijking daarvan met het geheel der schoolprestaties.*

Proefwerk I.

Vraagstuk	1		2		3		4		5		Proefwerk	
Resultaat	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—
Defect $\leqq 2$	7	7	11	3	11	3	13	1	9	5	14	0
Defect > 2	5	4	4	5	3	6	6	3	2	7	4	5
Totaal	12	11	15	8	14	9	19	4	11	12	18	5
In %	52	48	65	35	61	39	83	17	48	52	78	22

Proefwerk II.

Vraagstuk	1		2		3		4		5		Proefwerk	
Resultaat	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—
Defect $\leqq 2$	12	2	9	5	8	6	6	8	7	7	9	5
Defect > 2	7	2	2	7	5	4	0	9	6	3	4	5
Totaal	19	4	11	12	13	10	6	17	13	10	13	10
In %	83	17	48	52	56	44	26	74	56	44	56	44

Proefwerk III.

Vraagstuk	1*a*		1*b*		1*c*		1*d*		1*e*		2*a*		2*b*		2*c*		3*a*		3*b*		Proefw.	
Resultaat	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—
Defect $\leqq 2$ . .	10	4	9	5	10	4	10	4	11	3	13	1	11	3	10	4	13	1	0	14	12	2
Defect > 2 . .	3	6	4	5	4	5	3	6	2	7	7	2	5	4	3	6	6	3	3	6	4	5
Totaal	13	10	13	10	14	9	13	10	13	10	20	3	16	7	13	10	19	4	3	20	16	7
In %	56	44	56	44	61	39	56	44	56	44	87	13	70	30	56	44	83	17	13	87	70	30

Proefwerk IV.

Vraagstuk	1*a*		1*b*		2*a*		2*b*		Proefwerk	
Resultaat	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—
Defect $\leqq 2$	10	3	1	12	7	6	2	11	8	5
Defect > 2	6	2	2	6	3	5	0	8	3	5
Totaal	16	5	3	18	10	11	2	19	11	10
In %	76	24	14	86	48	52	10	90	52	48

Proefwerk V.

Vraagstuk	1		2		3		4		5		6		7		8		9		Proefw.	
Resultaat	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—
Defect $\leqq 2$ . .	12	1	11	2	12	1	11	2	7	6	12	1	8	5	10	3	6	7	13	0
Defect > 2 . .	6	2	6	2	6	2	6	2	0	8	6	2	4	4	3	5	1	7	7	1
Totaal	18	3	17	4	18	3	17	4	7	14	18	3	12	9	13	8	7	14	20	1
In %	86	14	81	19	86	14	81	19	33	67	86	14	57	43	62	38	33	67	95	5

15. *De stof, waarop de proefwerkvragen betrekking hebben.*

Proefwerk I.
Van lijst C: 5''', 17'', 1, 10'', 6.
Proefwerk II.
Van lijst C: 22, 19''', 18''', 7'''.
Van sectie H.A.C., lijst C: 10'''.
Proefwerk III.
Van lijst C: 19''', 23''', 18'''.
Van sectie H.A.C., lijst C: 10.
Proefwerk IV.
Van lijst C: 1, 10'.
Van sectie H.A.C., lijst C: 10'''.
Proefwerk V.
Van lijst C: 23, 5, 22, 18'''.
Van sectie H.A.C., lijst C: 10.

16. *Aard van enkele fouten in de proefwerken.*

Bij deze analyse zijn de l.l. ingedeeld in voldoende, zwakke en onvoldoende l.l. Dit is geschied op grond van hun cijfer voor algebra op het overgangsrapport. Lager dan $5\frac{1}{2}$ is „onvoldoende", $5\frac{1}{2}$ en 6 zijn „zwak", hoger dan 6 is „voldoende".

Proefwerk I.

Vraagstuk 1.

a. Twee (voldoende) l.l. schrijven: $\frac{1}{2}y = (x - 3)^2 - 1$ (nog goed).
$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - \frac{1}{2}$.

b. Een (onvoldoende) l.l. schrijft: $y = 2(x - 3)^2 + 7$ i.p.v. $2(x - 3)^2 - 2$.
Bij $2 \times 9 + 7$ blijkbaar de factor 2 over het hoofd gezien.

c. De onder *b.* genoemde fout is verwant aan de volgende: $y = 2(x - 6)^2 - 20$. Deze (voldoende) l.l. zegt achteraf: „ik heb niet naar de 2 gekeken, maar gedaan of er stond: $y = x^2 - 12x + 16$".

d. Drie l.l. schrijven: $y = 2(x - 3)^2 - 1$; dit wellicht gelezen als $2\{(x - 3)^2 - 1\}$.

e. Een (voldoende) l.l. schrijft: $\frac{1}{2}y = x^2 - 6x + 16$.

$$\frac{1}{2}y = (x - 3)^2 + 7.$$
$$y = 2(x - 3)^2 + 3\frac{1}{2}.$$

Verklaring van de l.l.: eerst vergeten de 16 te delen en dit later geprobeerd goed te maken door alsnog de resterende 7 te delen.

f. Een (voldoende) l.l. schrijft: $\frac{1}{2}y = (x - 3)^2 - 1$.

$$y = \frac{1}{2}(x - 3)^3 - 1.$$

De vermenigvuldiging met 2 geeft twee fouten.

g. Een (voldoende) l.l. schrijft: $y = 2\{(x - 3)^2 - 1\}$; top: $(3, -1)$.
De verklaring achteraf luidt: „ik heb $y = 2\{(x - 3)^2 - 1\}$, dus de coördinaten van de top zijn $(+3, -1)$, want 2 bepaalt slechts de wijdte en heeft er dus niets mee te maken."

Vraagstuk 2.

a. Soms werken de l.l. niet met een duidelijke schets van de grafiek; zij stellen zich deze zo'n beetje voor en geven daardoor de waarden van x tussen de nulpunten aan, in plaats van die er buiten.

b. Verscheidene voldoende l.l. blijken niet te weten, dat i.p.v. $(x) < -1$ en $(x) > 3$ niet mag worden geschreven $3 < (x) < -1$. Eén van deze l.l. geeft aan er niet bij gedacht te hebben, dat een getal niet kleiner dan -1 en groter dan 3 kan zijn.

c. Een fout nulpunt wordt veelal veroorzaakt door een tekenfout bij het oplossen van lineaire vergelijkingen als $-2x - 2 = 0$. Deze fouten worden door de l.l. zelf „stommiteiten" genoemd en een l.l. merkt op, dat hij die bij huiswerk niet zou maken.

Vraagstuk 3.

a. Enkele l.l. hadden de vraag aldus opgevat: „Bereken de coördinaten van de snijpunten van $y = x^2 - 4x + 7$ en $y = x + 3$ met de X-as." Een begrijpelijke fout, wanneer we bedenken, dat „de snijpunten" voor een l.l. toch eigenlijk betekent: „de snijpunten met de X-as".

b. Een voldoende l.l. maakt de tekening goed, vindt ook $(x-1)(x-4)=0$, maar noteert één snijpunt (1, 4) en vergeet het tweede. In plaats van $x_1 = 1$ en $x_2 = 4$ te noteren en hierbij $y_1 = 4$ en $y_2 = 7$ te berekenen, neemt hij de x-coördinaten samen tot de coördinaten van het punt (1,4).

Vraagstuk 4.

a. Een (voldoende) l.l. verwisselt bij het substitueren der coördinaten de x met de y.

b. Een (onvoldoende) l.l. vergeet in de vergelijking $3=a+b+c$, die hij moest krijgen, de c en lost het komende stel verlijkingen ook nog fout op.

c. Een (voldoende) l.l. moet oplossen:

$$a - b + c = 2$$
$$c = 4$$
$$a + b + c = 3.$$

Door te nemen $1 \times I + 1 \times III$ vindt hij $2a + 2c = 6$, i.p.v. $2a + 2c = 5$. Zie zijn toelichting: „Ik heb $2 + 4 = 6$ gedaan."

Vraagstuk 5.

a. Drie l.l. (1 onvold., 2 vold.) komen tot de vergelijking $a + b + c = 0$ i.p.v. $a - b + c = 0$.

b. In de betrekking $y = a(x + 1)(x - 4)$ wordt door sommigen wel voor y de waarde 1 gesubstitueerd, maar met x gebeurt niets.

c. Andere fouten:

$$y = (x + 1)(x - 4)$$
$$y = (x + 1)(x - 4) + 1$$

d. Enkele (voldoende) l.l. klaagden over tijdgebrek.

Proefwerk II.

Vraagstuk 1.

a. Een (onvoldoende) l.l. doet alsof er staat $5 + x$, en krijgt daardoor voor de nulpunten van de noemer -5 en -4; toch neemt ze nu de tekenvolgorde neg., pos., neg., wat, als ze consequent $5 + x$ genomen had, pos., neg., pos. had moeten worden. Haar verklaring achteraf: „gezegd, dat wanneer $5 - x = 0$, dat dan $x = -5$" illustreert dus slechts één der twee denkfouten.

Naar onze mening waarschijnlijk slechts één fout, nl. (één moment) —5 genomen i.p.v. +5, maar overigens met $-x$ gewerkt. Dus een slordigheid met het teken.

b. Een andere l.l. (zwak) neemt ook —5 tot nulpunt, en neemt de opvolging der toestanden voor de noemer wel dienovereenkomstig.

c. Een (zwakke) l.l. schrijft de drie toestandsstrepen goed op, maar stelt de voorwaarde op: breuk $\geqq 0$ i.p.v. breuk $\leqq 0$.

d. Enkele l.l. (onvold., zwakke en vold.) vergeten in het antwoord de gelijkheden of nemen ze verkeerd.

Vraagstuk 2.

a. $a^2 < 9 \rightarrow a < 3$ (7 l.l.; onvold., zwakke, vold.).

Verklaringen achteraf: „vergeten dat een kwadratische ongelijkheidsopgave 2 nulpunten had''. (Is het niet waarschijnlijk, dat veel l.l. in $a^2 < 9$ geen kwadratische ongelijkheidsopgave herkennen?)

Eén van deze l.l. (voldoende) is (achteraf) van mening, dat zijn fout schuilt in het gedeelte $a^2 - 9 < 0 \rightarrow a^2 < 9$.

Een andere van deze l.l. (voldoende) schrijft: „gewoon een stommiteit, want verder heb ik met $4a^2 < 100$ wel —5 en +5. Zie bovenstaande opmerking: $4a^2 < 100$ wordt eerder als kwadratische ongelijkheidsopgave herkend dan $a^2 < 9$; wordt dit misschien veroorzaakt door de coëfficient 4?

b. Een l.l. (voldoende) concludeert: $a^2 - 9 < 0 \rightarrow a^2 > 9$.

c. Een (voldoende) l.l. verwisselt de begrippen dal- en bergparabool.

d. $a^2 - 9 < 0$ impliceert $a - 3$ èn $a + 3 < 0$ (voldoende l.l.).

Vraagstuk 3.

a. Van de drie (voldoende) l.l. welke de oplossing vrijwel volledig vonden, vermeldde geeneen zowel bij vraag *a* als bij vraag *b.* het uitzonderingsgeval $a + 3 = 0$. Er waren 9 l.l. (1 onvold., 2 zwak, 6 vold.), die het uitzonderingsgeval geheel vergaten.

(Eigen ervaring: bij het maken van dit vraagstuk dacht ik in het begin: voor $a = -3$ één wortel. Bij het opschrijven van de uitkomst vergat ik dit.)

c. Veel fouten van de soort $a^2 - 25 < 0 \rightarrow a < 5$.

Vraagstuk 4.

De fouten die gemaakt worden, zijn te wijten aan een onvoldoende beheersing der ongelijkheidsopgaven.

a. Een (voldoende) l.l. maakt de volgende karakteristieke fouten:
Hij vindt twee voorwaarden: $a^2 > 25$ en $a^2 - 9 > 0$.
1. Uit de eerste concludeert hij: $a > 5$.
2. Hij vindt dan: $a > 5$ en $a > 3$ of $a < -3$; dit wordt genoteerd:

```
                          5
 ———————————————————+++++
        —3       3
 ++++———————————+++++++      —3 < a < 3 of a > 5.
        —3       3  5
 ————————++++————+++++
```

Hij verklaart achteraf: „bij de combinatie heb ik gedaan als bij een breuk: neg. × pos. = neg."

b. Een andere (eveneens vold.) l.l. noteert de voorwaarden en de vorm van de toestandsstrepen goed, maar begrijpt deze zelf achteraf niet meer.
Uit de fouten van het bij de laatste twee l.l. besproken type blijkt de wenselijkheid om twee mechanismen bij het oplossen van deze soort vraagstukken goed te leren onderscheiden:
1. $(x - 3)(x - 5) < 0$.
2. $(x - 3) < 0$ en $(x - 5) < 0$.

Vraagstuk 5.

a. Een (voldoende) l.l. noteert: $y = \pm(x - 1)^2 - 2$. Twee tekortkomingen in deze notatie: -2 moet $+2$ zijn en de wijdtecoëfficient is vergeten; de mogelijkheden van berg- en dalparabool zijn in de notatie wèl verdisconteerd.

b. Een (onvoldoende) l.l. zet: $y = a(x^2 - 1) + 2$.

c. Een (voldoende) l.l. zet: $y = A(x - 1) + 2$. De exponent 2 vergeten.

d. Een (voldoende) l.l. schrijft: $y = A(x - 1)^2 + 2$
$x = +4$ en $y = -8$ geeft $y = A(9 + 2)$.

e. Drie l.l. (onvold., zwak, vold.) nemen resp. de punten $(-4, -8)$, $(-1, -8)$ en $(-3, -8)$ als symmetrisch punt i.p.v. $(-2, -8)$.

f. Een (voldoende) l.l. vercijfert zich. Hij vindt: $y = -\frac{10}{9}(x-1)^2 + 2 = -\frac{10}{9}x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{8}{9}$.

g. Een (zwakke) l.l. verzuimt de vraag te beantwoorden, na alle parameters goed te hebben berekend.

Proefwerk III.

Vraagstuk 1.

a. Weer een geval van het niet herkennen als kwadratische ongelijkheidsopgave.

b. Twee l.l. (onvold., zwak) vinden: $a^2 > 2a \rightarrow a > 2$.

c. Vier l.l. (onvold., zwak, vold.) beschouwen c als extreme waarde van $ax^2 + bx + c$.

d. Een (zwakke) l.l. laat de voorwaarde $a(a-2) > 0$ weg.

e. Acht l.l. (onvold., zwak, vold.) hebben uit $a(a-2) = 0$ alleen gevonden: $a_1 = 2$.

f. Twee (voldoende) l.l. hebben $a_2 = 2$ laten vervallen, omdat $y = -1$ niet voor de vergelijking van een rechte lijn werd gehouden.

g. Twee voldoende en een zwakke l.l. vinden $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ als grootste waarde.

h. Twee l.l. (zwak, vold.) plaatsen de getallen 0, $\frac{2}{5}$ en 2 in de volgorde $\frac{2}{5}$, 0, 2.

i. Een (zwakke) l.l. verwart „a" > 0 (d.w.z. de a uit $ax^2 + bx + c$) met $a > 0$.

j. Een (voldoende) l.l. schrijft: $y = 3x^2 + x - 1 = x^2 + x - 3$ en behandelt dit behoorlijk.

k. Een (voldoende) l.l. schrijft: $(a) < 0$ en $(a) > 0$, i.p.v. $(a) < 0$ en $(a) > 2$; hij noemt het zelf een „schrijffout".

l. Twee zwakke en een voldoende l.l. struikelen in de kwadraatafsplitsing.

Vraagstuk 2.

a. Door 15 l.l. wordt het uitzonderingsgeval $a = 2\frac{1}{2}$ over het hoofd gezien.

b. Drie l.l. (onvold. zwak, vold.) schrijven

$$a - 3 < 0 \text{ i.p.v. } \frac{a-3}{2a-5} < 0.$$

c. Een (onvoldoende) l.l. leidt uit $\frac{a-3}{2a-5} > 0$ af, dat $a - 3 > 0$ is.

d. Zes l.l. (1 onvold., 5 vold.) vergeten de voorwaarde $D \geqq 0$.

e. Een (zwakke) l.l. neemt $x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$.

f. Een (voldoende) l.l. ontbindt $2a^2 - a - 6$ aldus: $(a-4)(a+3)$; het „kunstje" is blijkbaar verkeerd onthouden.

g. Een l.l. schrijft $D = b^2 - 4ac$, maar verwaarloost daarna de term $-4ac$.

h. Een (zwakke) l.l. verklaart zijn fout aldus: „Ik had er staan:

$-1\frac{1}{2}$		2	
	$2\frac{1}{2}$		3
		2	3

Dus ik had 2 rechts van $2\frac{1}{2}$ staan; een slordigheid en een stommiteit."

i. Een (voldoende) l.l. schrijft: 1 wortel voor $a = -1\frac{1}{2}$, $a = 2$ en $a = 0$, en verklaart hiermee allicht $2a - 5 = 0$ bedoeld te hebben (verwarring van de a uit het vraagstuk en de a uit $ax^2 + bx + c$).

j. Een (voldoende) l.l. neemt $\frac{2}{5}$ i.p.v. $2\frac{1}{2}$ als nulpunt van $2a - 5$.

k. Een (voldoende) l.l. schrijft in zijn werk: $\frac{a-3}{2a-5} < 0$ en concludeert:

$(a) < 2\frac{1}{2}$ en $(a) > 3$. Zijn nabeschouwing luidt: „ik denk dat ik een beetje heb zitten suffen, toen ik $(a) < 2\frac{1}{2}$ en $(a) > 3$ neerschreef i.p.v. $2\frac{1}{2} < (a) < 3$."

l. Een (zwakke) l.l. zet $a = 1\frac{1}{2}$ i.p.v. $a = -1\frac{1}{2}$.

Vraagstuk 3.

a. Enige l.l. (onvold., zwak, vold.) vermelden de voorwaarde $D = 0$, zonder de gestelde vraag tot een goede oplossing te kunnen brengen.

b. „Aanvankelijk bestond deze derde opgave alleen maar uit vraag *a*. Toen me onder het werken bleek, dat enkele l.l. een oplossing gaven met de juiste conclusie, zonder dat ik de overtuiging kreeg, dat de quintessens begrepen was, leek het me gewenst vraag *b.* toe te voegen. Het resultaat bevestigde mijn vermoeden, dat het probleem nog te lastig was."

17. *Peil van de klas.*

Voldoende.